

Seminarvortrag über das Cartan-Kriterium

Stefanie Hittmeyer und Björn Hoffmann

Dieser Vortrag stellt ein schönes Kriterium für die Auflösbarkeit einer Lie-Algebra vor. Ziel dieses Vortrags ist es, eben dieses Kriterium, das Cartan-Kriterium, zu beweisen. Das Cartan-Kriterium selber ist sehr speziell, da es eine Aussage für Unteralgebren von $\text{End}(V)$ trifft. Wir beweisen im nachhinein eine Folgerung, die dann auch allgemeine Lie-Algebren betrachtet.

Sei stets angenommen, dass ein algebraisch abgeschlossener Körper K mit Charakteristik von Null zugrunde liegt.

Um das Cartan-Kriterium zu beweisen, benutzen wir den Satz von Engel. Zuvor aber noch ein

Lemma 1.1.

Sei V ein Vektorraum über K mit Dimension m und seien A, B zwei Unterräume von $\text{End}(V)$. Setze $M = \{x \in \text{End}(V) : [x, B] \subset A\}$. Ist $x \in M$ mit $\text{tr}(xy) = 0$ für jedes $y \in M$, so ist x nilpotent.

Bevor wir das Lemma beweisen noch eine Proposition auf deren Beweis hier verzichtet werden soll:

Proposition 1.1.

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K und $x \in \text{End}(V)$.

- (a) Dann gibt es eindeutig bestimmte $x_s, x_n \in \text{End}(V)$ mit $x = x_s + x_n$ wobei x_s diagonalisierbar und x_n nilpotent ist. Außerdem kommutieren x_s und x_n (Jordan-Zerlegung).
- (b) Es gibt Polynome $p(T), q(T)$ ohne konstanten Term, so dass $x_s = p(x)$ und $x_n = q(x)$.
- (c) Sind $A \subset B \subset V$ Unterräume und x bildet B nach A ab, dann bilden auch x_s und x_n B nach A ab.

Nun zum Beweis des Lemmas:

Beweis.

Sei $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von V und $x = s + n$ die Jordan-Zerlegung von x (vgl. Prop. 1.1(a)), so dass die Matrix von s gerade $\text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ ist mit $a_i \in K$ für alle i . Sei Q der Primkörper in K , d.h. der kleinste Körper $Q \subset K$. Da die Charakteristik von K gleich Null ist, ist Q isomorph zu $\mathbb{Q}$ (vgl. Algebra). Fasse K als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auf. Sei E der von den Eigenwerten $(a_1, \dots, a_m)$ aufgespannte Unterraum von K .

Zeige nun $s = 0$ oder äquivalent dazu, dass $E = 0$. Da E endlich dimensional ist,

reicht es zu zeigen, dass $E^* = 0$, d.h. jede lineare Abbildung $f : E \rightarrow \mathbb{Q}$ gerade die Nullabbildung ist.

Sei also ein $f \in E^*$ gegeben und sei $y \in \text{End}(V)$ die Abbildung, deren Matrix gerade $\text{diag}(f(a_1), \dots, f(a_m))$ ist.

Für die Basismatrizen E_{ij} gilt:

$$\begin{aligned} \text{ad}(s)(E_{ij}) &= sE_{ij} - E_{ij}s = a_i E_{ij} - a_j E_{ij} = (a_i - a_j)E_{ij} \\ \text{ad}(y)(E_{ij}) &= (f(a_i) - f(a_j))E_{ij} \end{aligned}$$

Sei nun $r(T) \in K[T]$ ein Polynom ohne konstanten Term mit

$$r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$$

für alle i und j . Ein solches Polynom existiert, da man es durch Interpolation (insbesondere Lagrange-Interpolation) konstruieren kann. Nun gilt $\text{ad}(y) = r(\text{ad}(s))$, denn $\text{ad}(y)(E_{ij}) = r(\text{ad}(s))E_{ij}$. Der halbeinfache Teil von $\text{ad}(x) = \text{ad}(s) + \text{ad}(n)$ ist $\text{ad}(s)$ und nach Prop. 1.1(b) können wir $\text{ad}(s)$ als Polynom in $\text{ad}(x)$ schreiben, etwa $\text{ad}(s) = p(\text{ad}(x))$. Da $x \in M$ ist $\text{ad}(x)(B) \subset A$. Dann gilt aber auch

$$\text{ad}(y)(B) = r(\text{ad}(s))(B) = r(p(\text{ad}(x)))(B) \subset A$$

Damit ist $y \in M$. Nun wissen wir $\text{tr}(xy) = 0$. Somit ist $\sum_{i=1}^m a_i f(a_i) = 0$ und auch $\sum_{i=1}^m f(a_i)^2 = 0$ (anwenden von f). Da $f(a_i) \in \mathbb{Q}$ gilt $f(a_i)^2 \geq 0$. Also $f(a_i) = 0$ für jedes i . Dann ist f aber die Nullabbildung, weil $a_1, \dots, a_m$ eine Basis von E ist.

□

Nun noch eine Erinnerung an den Satz von Engel und dann wollen wir das Cartan Kriterium beweisen.

Erinnerung (Satz von Engel).

Ist jedes Element von einer Lie-Algebra L ad-nilpotent, so ist L nilpotent.

Satz 1.1 (Cartan-Kriterium).

Sei L eine Unter-Lie-Algebra von $\text{End}(V)$ mit V endlich dimensionaler Vektorraum über K . Gilt $\text{tr}(xy) = 0$ für alle $x \in [L, L]$ und $y \in L$, so ist L auflösbar.

Bemerkung.

Es gilt auch die Umkehrung, d.h. ist L auflösbar, so gilt $\text{tr}(xy) = 0$ für alle $x \in [L, L]$ und $y \in L$.

Beweis.

Es reicht zu zeigen, dass $[L, L]$ nilpotent ist, denn jede nilpotente Lie Algebra ist auch auflösbar. Ist $[L, L]$ auflösbar, so auch L , denn wenn die Kette für $[L, L]$ abbricht, so auch für L . Wir zeigen: Alle $x \in [L, L]$ sind nilpotent. Dann ist auch $\text{ad}(x)$ nilpotent für alle x , und mit dem Satz von Engel folgt die Behauptung.

Setze $A = [L, L]$, $B = L$ und $M = \{x \in \text{End}(V) : [x, L] \subset [L, L]\}$. Dann gilt: $L \subset M$. Wir wissen: $\text{tr}(xy) = 0$ für alle $x \in [L, L]$ und $y \in L$. Um das Lemma anwenden zu können brauchen wir aber: $\text{tr}(xy) = 0$ für alle $x \in [L, L]$ und $y \in M$ (da $[L, L] \subset L \subset M$).

Sei $[x, y] \in [L, L]$ und $z \in M$. Dann ist

$$\text{tr}([x, y]z) = \text{tr}(x[y, z]) = \text{tr}([y, z]x)$$

Nun ist $[y, z] \in [L, L]$ und $x \in L$, also $\text{tr}([x, y]z) = \text{tr}([y, z]x) = 0$.

Damit folgt die Behauptung durch Anwendung des Lemmas.

Korollar 1.1.

Sei L eine Lie-Algebra mit $\kappa(x, y) = \text{tr}(ad(x)ad(y)) = 0$ für alle $x \in [L, L]$ und $y \in L$. Dann ist L auflösbar.

Die Behauptung des Korollars folgt aus dem Cartan-Kriterium und der folgenden Proposition, die hier auch nur erwähnt werden soll:

Proposition 1.2.

Sei L eine Lie-Algebra.

- (a) Ist L auflösbar, dann auch alle Unteralegebren und homomorphe Bilder.
- (b) Ist I ein auflösbares Ideal von L und auch L/I auflösbar, so ist es auch L .
- (c) Sind I, J auflösbare Ideale von L , so ist es auch $I + J$.

Nun noch der Beweis des Korollars:

Beweis.

Mit dem Cartan-Kriterium folgt, dass $ad(L)$ auflösbar ist. Mit $\text{Kern}(ad) = Z(L)$ haben wir ein auflösbares Ideal von L gefunden und $L/Z(L)$ ist isomorph zu $\text{Bild}(ad)$. Von dem haben wir aber gerade gesehen, dass es auflösbar ist. Mit Prop. 1.2(b) folgt, dass auch L selber auflösbar ist.

□