

Satz von Engel

Anton Feldmann, Marc Gössling

April 2006

Definition. Sei L eine Lie-Algebra. Dann setzt man $L^0 := L$, $L^1 := [L, L]$, $\dots$, $L^{n+1} := [L, L^n]$.

Bemerkung. $(L^i)_{i \in \mathbb{N}}$ nennt man die *absteigende Zentralreihe* von L , es gilt $L^0 \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \dots$. L^i ($i \geq 0$) ist ein Ideal von L .

Definition. L heißt *nilpotent*, falls $L^n = 0$ für ein n .
 $r := \min \{n \mid L^n = 0\}$ nennt man die *nilpotente Länge* von L .

Beispiel. Betrachte $L = \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y$ und definiere $[-, -] : L \rightarrow L$ durch $[\lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y] = (\lambda' \mu - \lambda \mu') x$, dann ist $(L, [-, -])$ eine Lie-Algebra (nachrechnen).
 L ist nicht nilpotent, denn für alle $n \geq 1$ ist $L^n = \mathbb{K}x$:

$$\begin{aligned} L^1 &= [L, L] = \text{Span} \{ (\lambda' \mu - \lambda \mu') x \mid \lambda', \mu, \lambda, \mu' \in \mathbb{K} \} = \mathbb{K}x \\ L^2 &= [L, L^1] = [L, \mathbb{K}x] = \text{Span} \{ \lambda' \mu x \mid \lambda', \mu \in \mathbb{K} \} = \mathbb{K}x \\ L^3 &= [L, L^2] = [L, \mathbb{K}x] = \mathbb{K}x \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiel. Betrachte $L = \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y \oplus \mathbb{K}z$ und setze $[\lambda x + \mu y + \nu z, \lambda' x + \mu' y + \nu' z] = (\lambda' \mu - \lambda \mu') z$, dann ist $(L, [-, -])$ eine Lie-Algebra (nachrechnen).
 L ist nilpotent, denn:

$$\begin{aligned} L^1 &= [L, L] = \text{Span} \{ (\lambda' \mu - \lambda \mu') z \mid \lambda', \mu, \lambda, \mu' \in \mathbb{K} \} = \mathbb{K}z \\ L^2 &= [L, L^1] = [L, \mathbb{K}z] = 0 \end{aligned}$$

Lemma 1. Sei L eine Lie-Algebra und $Z(L)$ das Zentrum von L .

- i) Ist L nilpotent, dann sind alle Unteralgebren und homomorphen Bilder von L nilpotent.
- ii) Ist $L/Z(L)$ nilpotent, dann ist auch L nilpotent.
- iii) Ist L nilpotent, dann ist $Z(L) \neq 0$.

Beweis.

- i) Sei U eine Unteralgebra von L , dann gilt $U^i \subseteq L^i$ für alle i . Also folgt $U^n \subseteq L^n = 0$ für ein n .
Sei M eine Lie-Algebra und $\phi : L \rightarrow M$ ein surjektiver Lie-Algebren-Homomorphismus, dann gilt $\phi(L^i) = M^i$ für alle i :

Induktion über i .

$$i = 0 : \phi(L) = M$$

$$i \rightarrow i + 1 : \phi(L^{i+1}) = \phi([L, L^i]) \stackrel{\phi \text{ Hom.}}{=} [\phi(L), \phi(L^i)] \stackrel{IV}{=} [M, M^i] = M^{i+1}$$

Also $M^n = \phi(L^n) = \phi(0) = 0$ für ein n .

ii) Sei $(L/Z(L))^n = 0$ für ein n .

Betrachte den kanonischen Homomorphismus $\pi : L \rightarrow L/Z(L)$, $x \mapsto x + Z(L)$.

Dann folgt $\pi(L^n) \stackrel{a)}{=} (L/Z(L))^n = 0$, d.h. $L^n \subseteq \text{Kern } \pi = Z(L)$.

Also gilt $L^{n+1} = [L, L^n] \subseteq [L, Z(L)] = 0$.

iii) Der letzte Term der absteigenden Zentralreihe, der ungleich Null ist, ist eine Teilmenge von $Z(L)$.

□

Lemma 2. Sei $x \in \text{End } V$ nilpotent. Dann ist auch ad_x nilpotent.

Beweis. Definiere $l_x, r_x : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$ durch $l_x(y) = xy$, $r_x(y) = yx$. Diese Abbildungen sind nilpotent, da x nilpotent ist ($(l_x)^n(y) = x^n y = 0y = 0$) und es gilt $l_x r_x(y) = xyx = r_x l_x(y)$. In jedem Ring (hier $\text{End}(\text{End } V)$) ist die Summe oder Differenz von zwei kommutierenden, nilpotenten Elementen wieder nilpotent. Also ist $ad_x = l_x - r_x$ nilpotent. □

Definition. Sei L eine Lie-Algebra und $\mathfrak{g} \subset L$ eine Unter algebra. Dann heißt

$$\mathfrak{n}_L(\mathfrak{g}) := \{x \in L \mid [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\}$$

der Normalisator von $\mathfrak{g}$ unter L .

Satz 1. Sei $0 \neq V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und L eine Unter algebra von $\text{End } V$. Besteht L aus nilpotenten Endomorphismen, dann existiert ein $0 \neq v \in V$ mit $L.v = 0$.

Beweis. Induktion über $\dim L$.

IA: $\dim L = 0$ klar (oder $\dim L = 1$, jeder nilpotente Endomorphismus hat einen Eigenvektor zum Eigenwert 0).

IS: $\dim L > 0$.

Sei $U \subset L$ eine Unter algebra. Für jedes $x \in U$ ist ad_x nilpotent (Lemma 2). Also ist auch $\overline{ad_x} : L/U \rightarrow L/U$, $y + U \mapsto ad_x(y) + U$ nilpotent¹. D.h. $\overline{ad_U} := \{\overline{ad_x} \mid x \in U\}$ ist eine Unter algebra von $\text{End}(L/U)$, die aus nilpotenten Endomorphismen besteht.

Wegen $\dim \overline{ad_U} = \dim U < \dim L$ können wir also die IV anwenden und erhalten ein $y + U \neq U$ mit $\overline{ad_U} \cdot (y + U) = U$, also $[U, y] \subseteq U$ ($y \notin U$). D.h. $U \subset \mathfrak{n}_L(U)$.

Wähle nun eine echte Unter algebra U von L mit maximaler Dimension. Dann gilt $U \subset \mathfrak{n}_L(U) \subseteq L$, also $\mathfrak{n}_L(U) = L$. D.h. U ist ein Ideal von L . Für $z \in L \setminus U$ gilt nun $U \subset U \oplus \mathbb{K}z \subseteq L$, also $L = U \oplus \mathbb{K}z$.

Nach IV ist $W := \{v \in V \mid U.v = 0\}$ nicht leer. Sei $x \in L$, $y \in U$, $w \in W$,

¹diese Abbildung ist für $x \in U$ wohldefiniert, denn ist $y + U = y' + U$, so folgt $[x, y - y'] \in U$, also $ad_x(y) + U = ad_x(y') + U$

dann folgt $yx.w = x \underbrace{y.w}_{=0} - \underbrace{[x,y]}_{\in U}.w = 0$. W ist somit stabil unter L . Insbesondere gilt $z(W) \subseteq W$, d.h. z kann als nilpotenter Endomorphismus von W aufgefasst werden. Also existiert ein $v \in W$ mit $z.v = 0$ und folglich $L.v = (U \oplus \mathbb{K}z).v = 0$.

□

Definition. Sei L eine Lie-Algebra und $x \in L$. Wir nennen x *ad-nilpotent*, falls ad_x ein nilpotenter Endomorphismus ist.

Bemerkung. Die Identitätsabbildung id_V ist zwar (für $V \neq 0$) nicht nilpotent, aber offensichtlich ad-nilpotent.

Satz 2 (Engel). *Sei L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra. L ist genau dann nilpotent, wenn alle Elemente von L ad-nilpotent sind.*

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ Es gibt ein n , so dass $[x_1, [x_2, [\dots, [x_n, y] \dots]] = 0$ bzw. $ad_{x_1}ad_{x_2}ad_{x_3}\dots ad_{x_n}(y) = 0$ für alle $x_i, y \in L$. Insbesondere ist also $(ad_x)^n = 0$ für alle $x \in L$.

„ $\Leftarrow$ “ Induktion über $\dim L$.

IA: $\dim L = 0$. D.h. $L = 0$, also L nilpotent.

IS: $\dim L \geq 1$.

$ad_L \subseteq \text{End } L$ erfüllt die Bedingungen vom vorherigen Satz. Also gibt es ein $0 \neq x \in L$ mit $ad_L.x = 0$, d.h. $[L, x] = 0$ und somit $Z(L) \neq 0$. $L/Z(L)$ besteht aus ad-nilpotenten Elementen und hat kleinere Dimension als L . Nach IV ist $L/Z(L)$ folglich nilpotent. Nach Lemma 1 ii) ist dann auch L nilpotent.

□

Literatur

- [1] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer, 1972.
- [2] H. Strade; R. Farnsteiner: *Modular Lie algebras and their representations*. Dekker, 1988.