Satz von Gabriel

Anton Feldmann und Marc Gössling

Juni 2006

1 Weyl–Gruppen, Wurzeln und Coxeter–Transformationen

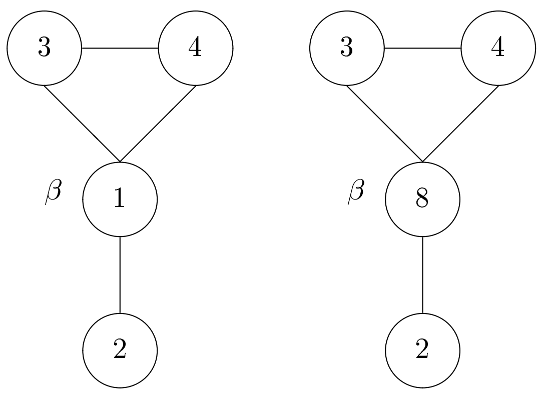
Erinnerung. Ist Γ ein Graph, dann bezeichnet man mit Γ_0 die Menge der Knoten und mit Γ_1 die Menge der Kanten von diesem Graphen. Ist $\beta \in \Gamma_0$, dann bezeichnet man mit Γ^β die Menge der Kanten von Γ, die β als Start- oder Endknoten besitzen.

Definition. Sei Γ ein Graph ohne Schleifen. Wir setzen $\mathfrak{E}_\Gamma := \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma_0} \mid x_\alpha \in \mathbb{Q}\}$ (wir betrachten also $\mathbb{Q}^{|\Gamma_0|}$, wobei jedem Knoten des Graphen eine Koordiante aus dem Vektorraum zugeordnet ist). Für jedes $\beta \in \Gamma_0$ bezeichnen wir mit $\bar\beta$ den Vektor in $\mathfrak{E}_\Gamma$, so dass $\bar\beta_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \beta$ und $\bar\beta_\beta = 1$ ($\bar\beta$ entspricht also einem Basisvektor e_i).
Wir nennen einen Vektor $x = (x_\alpha)$ *ganzzahlig*, falls $x_\alpha \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \Gamma_0$. Und wir nennen einen Vektor $x = (x_\alpha)$ *positiv* (geschrieben $x > 0$), falls $x \neq 0$ und $x_\alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in \Gamma_0$.
Wir bezeichnen mit B die quadratische Form auf $\mathfrak{E}_\Gamma$, definiert durch

$$B(x) = \sum_{\alpha\in\Gamma_0} x_\alpha^2 - \sum_{l\in\Gamma_1} x_{\gamma_1(l)} x_{\gamma_2(l)},$$

wobei $x = (x_\alpha)$ ist und $\gamma_1(l)$, $\gamma_2(l)$ die Knoten der Kante l sind. Mit $< -, - >$ bezeichnen wir die zugehörige symmetrische Bilinearform, es ist also $< v, w >= \frac{1}{2}\left(B(v+w) - B(v) - B(w)\right)$.
Für jedes $\beta \in \Gamma_0$ bezeichnen wir mit σ_β die lineare Abbildung in $\mathfrak{E}_\Gamma$, definiert durch $(\sigma_\beta(x))_\gamma = x_\gamma$ für $\gamma \neq \beta$ und $(\sigma_\beta(x))_\beta = -x_\beta + \sum_{l\in\Gamma^\beta} x_{\gamma(l)}$, wobei $\gamma(l)$ der Knoten der Kante l ist, der ungleich β ist. Wir bezeichnen mit W die Halbgruppe von Abbildungen in $\mathfrak{E}_\Gamma$, die durch die σ_β ($\beta \in \Gamma_0$) erzeugt wird.

Beispiel. Links ist ein $x \in \mathfrak{E}_\Gamma$ dargestellt und rechts $\sigma_\beta(x)$.



Lemma 1.

i) Sind $\alpha, \beta \in \Gamma_0,\ \alpha \neq \beta$, *dann gilt* $<\bar{\alpha}, \bar{\alpha}>= 1$ *und* $2 < \bar{\alpha}, \bar{\beta} >$ *ist das Negative der Anzahl der Kanten, die* α *und* β *verbinden.*

ii) Sei $\beta \in \Gamma_0$. *Dann ist* $\sigma_\beta(x) = x - 2 < \bar{\beta}, x > \bar{\beta}$ *und* $\sigma_\beta^2 = id$. *Insbesondere ist* W *eine Gruppe.*

iii) W *erhält das ganzzahlige Gitter in* $\mathfrak{E}_\Gamma$ *und die quadratische Form* B.

iv) Ist B *positiv definit (also* $B(x) > 0$ *für* $x \neq 0$*), dann ist* W *endlich.*

Beweis.

i) Es ist $<\bar{\alpha}, \bar{\alpha}>= B(\bar{\alpha}) = 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned} 2 < \bar{\alpha}, \bar{\beta} >=& B(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) - B(\bar{\alpha}) - B(\bar{\beta}) \\ =& \left(1^2 + 1^2 - \#\{l \in \Gamma_1 \mid \text{die Knoten von l sind } \alpha \text{ und } \beta\}\right) - 1 - 1 \end{aligned}$$

ii) Die Behauptung sieht man durch nachrechnen.

$$\begin{aligned} B(\bar{\beta} + x) =& \sum_{\alpha \in \Gamma_0} \left(\bar{\beta} + x\right)_\alpha^2 - \sum_{l \in \Gamma_1} \left(\bar{\beta} + x\right)_{\gamma_1(l)} \left(\bar{\beta} + x\right)_{\gamma_2(l)} \\ =& (1 + x_\beta)^2 + \sum_{\beta \neq \alpha \in \Gamma_0} x_\alpha^2 - \sum_{l \in \Gamma^\beta} (1 + x_\beta) x_{\gamma(l)} - \sum_{l \in \Gamma_1 \setminus \Gamma^\beta} x_{\gamma_1(l)} x_{\gamma_2(l)} \\ =& 1 + 2x_\beta + \sum_{\alpha \in \Gamma_0} x_\alpha^2 - \sum_{l \in \Gamma^\beta} x_{\gamma(l)} - \sum_{l \in \Gamma_1} x_{\gamma_1(l)} x_{\gamma_2(l)} \\ =& 1 + 2x_\beta - \sum_{l \in \Gamma^\beta} x_{\gamma(l)} + B(x) \end{aligned}$$

$$2 < \bar{\beta}, x >= B(\bar{\beta} + x) - B(\bar{\beta}) - B(x) = 2x_\beta - \sum_{l \in \Gamma^\beta} x_{\gamma(l)}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta(\sigma_\beta(x)) =& \sigma_\beta(x - 2 < \bar{\beta}, x > \bar{\beta}) \\ =& \sigma_\beta(x) - 2 < \bar{\beta}, x > \sigma_\beta(\bar{\beta}) \\ =& \sigma_\beta(x) + 2 < \bar{\beta}, x > \bar{\beta} \\ =& x \end{aligned}$$

Also hat jedes σ_β ein Inverses in W, d.h. W ist eine Gruppe.

iii) Ist x ganzzahlig, so ist auch $\sigma_\beta(x)$ ganzzahlig, denn $\sum_{l \in \Gamma^\beta} x_{\gamma(l)}$ ist ganzzahlig. Folglich erhält W das ganzzahlige Gitter.

Nach der folgenden Rechnung erhält W auch die quadratische Form B.

$$\begin{aligned}
B(\sigma_\beta(x)) &= \sum_{\alpha\in\Gamma_0} (\sigma_\beta(x))_\alpha^2 - \sum_{l\in\Gamma_1} (\sigma_\beta(x))_{\gamma_1(l)} (\sigma_\beta(x))_{\gamma_2(l)} \\
&= \left(-x_\beta + \sum_{l'\in\Gamma^\beta} x_{\gamma(l')}\right)^2 + \sum_{\beta\neq\alpha\in\Gamma_0} x_\alpha^2 \\
&\quad - \sum_{l\in\Gamma^\beta} \left(x_\beta - 2x_\beta + \sum_{l'\in\Gamma^\beta} x_{\gamma(l')}\right) x_{\gamma(l)} - \sum_{l\in\Gamma_1\setminus\Gamma^\beta} x_{\gamma_1(l)} x_{\gamma_2(l)} \\
&= -\,2x_\beta \sum_{l'\in\Gamma^\beta} x_{\gamma(l')} + \left(\sum_{l'\in\Gamma^\beta} x_{\gamma(l')}\right)^2 + \sum_{\alpha\in\Gamma_0} x_\alpha^2 \\
&\quad - \left(-2x_\beta + \sum_{l'\in\Gamma^\beta} x_{\gamma(l')}\right) \sum_{l\in\Gamma^\beta} x_{\gamma(l)} - \sum_{l\in\Gamma_1} x_{\gamma_1(l)} x_{\gamma_2(l)} \\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma_0} x_\alpha^2 - \sum_{l\in\Gamma_1} x_{\gamma_1(l)} x_{\gamma_2(l)} = B(x)
\end{aligned}$$

iv) Die $\bar{\alpha}$ ($\alpha \in \Gamma_0$) bilden eine Basis von $\mathfrak{E}_\Gamma$, d.h. ein $w \in W$ ist durch die Bilder $w(\bar{\alpha})$ eindeutig bestimmt (w ist linear). Wir zeigen nun, dass es für $w(\bar{\alpha})$ nur endlich viele Möglichkeiten gibt. Da Γ_0 endlich ist, folgt dann, dass W endlich sein muss.
Nach iii) ist $w(\bar{\alpha})$ ganzzahlig und $B(w(\bar{\alpha})) = B(\bar{\alpha}) = 1$. Also ist zu zeigen, dass $M := \left\{x \in \mathbb{Z}^{|\Gamma_0|} \mid B(x) = 1\right\}$ endlich ist. Ist B auf $\mathbb{Q}$ positiv definit, so ist B auch auf $\mathbb{R}$ positiv definit (die darstellende Matrix ist positiv definit, gdw. alle Hauptminoren positiv sind). Definiere eine Norm $||-||_B : \mathbb{R}^{|\Gamma_0|} \to \mathbb{R}$, $||x||_B := \sqrt{B(X)}$. Die Menge $\left\{x \in \mathbb{R}^{|\Gamma_0|} \mid B(x) \leq 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^{|\Gamma_0|} \mid ||x||_B \leq 1\right\}$ ist beschränkt, also ist insbesondere M beschränkt. In einer beschränkten, diskreten Menge liegen aber nur endlich viele (verschiedene) Elemente.

$\square$

Bemerkung. W nennt man die *Weyl–Gruppe* von Γ.

Für den Beweis des Satzes von Gabriel ist es wichtig zu wissen, wann B positiv definit ist.

Lemma 2. *B ist positiv definit für die Graphen A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 und nur für diese Graphen.*

Beweis.

1) Enthält Γ Teilgraphen der Form aus Abbildung 1, dann ist B nicht positiv definit. Werden nämlich die Werte wie in Abbildung 1 gesetzt (und alle restlichen mit Null), dann erhalten wir einen Vektor $0 \neq x \in \mathfrak{E}_\Gamma$ mit $B(x) = 0$.
Folglich muss der Graph vom Typ aus Abbildung 2 sein, wenn B positiv definit ist ($p, q, r \in \mathbb{N}_0$).

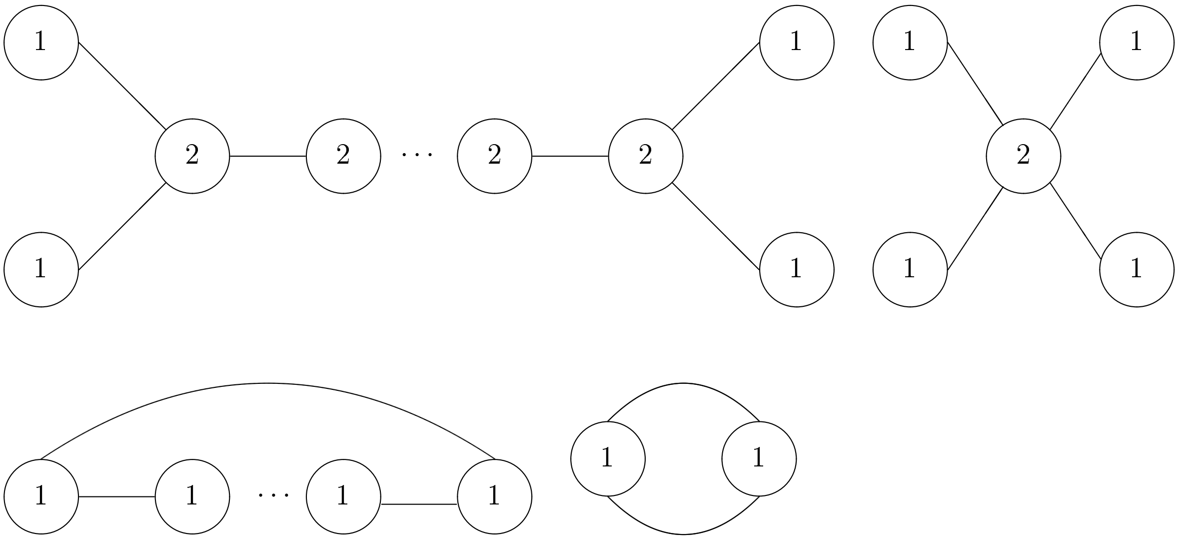


Abbildung 1: Die Graphen, die nicht auftreten können.

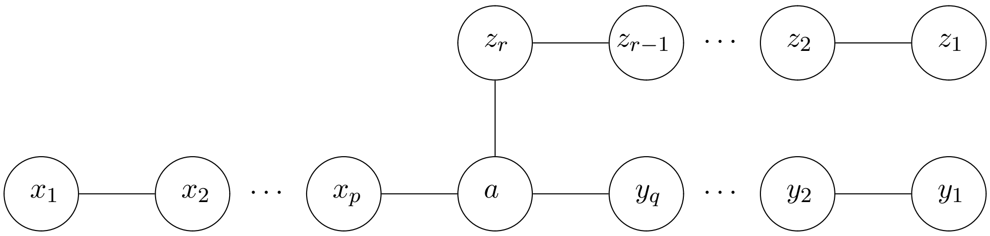


Abbildung 2: Der einzige Graphtyp für den B positiv definit sein kann.

2) Für alle $p \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die folgende quadratische Form in $p+1$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$:

$$C_p(x_1, \ldots, x_{p+1}) := -x_1x_2 - \ldots - x_px_{p+1} + {x_1}^2 + \ldots + {x_p}^2 + \frac{p}{2(p+1)}x_{p+1}^2$$

Diese Form kann zu (*) umgeschrieben werden.

$$\sum_{i=1}^{p} \overbrace{\frac{i}{2\,(i+1)}}^{>0} \overbrace{\left(x_{i+1} - \frac{i+1}{i}x_i\right)^2}^{\geq 0} \tag{*}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{i}{2\,(i+1)} \left(x_{i+1}^2 - 2\frac{i+1}{i}x_ix_{i+1} + \frac{(i+1)^2}{i^2}x_i^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{p} x_ix_{i+1} + \sum_{i=1}^{p} \frac{i}{2\,(i+1)}{x_{i+1}}^2 + \sum_{i=1}^{p} \frac{i+1}{2i}{x_i}^2$$

$$= -\sum_{i=1}^{p} x_ix_{i+1} + \sum_{i=2}^{p+1} \frac{i-1}{2i}x_i^2 + \sum_{i=1}^{p} \frac{i+1}{2i}x_i^2$$

$$= -\sum_{i=1}^{p} x_ix_{i+1} + \sum_{i=1}^{p} \frac{i-1+i+1}{2i}{x_i}^2 + \frac{p}{2\,(p+1)}{x_{p+1}}^2$$

$$= C_p(x_1, \ldots, x_{p+1})$$

C_p ist also positiv semidefinit und $\mathrm{Kern}(C_p) = \Big\{(x_i) \mid x_i = \frac{i}{i+1}x_{i+1},\ x_{p+1} \in \mathbb{Q}\Big\}$. Jeder Vektor $x \neq 0$ mit $C_p(x) = 0$ hat nur Koordinaten ungleich Null.

3) Außerdem gilt $B(x_i, y_i, z_i, a) = C_p(x_1, \dots, x_p, a) + C_q(y_1, \dots, y_q, a) + C_r(z_1, \dots, z_r, a) + \Big(1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)}\Big) a^2$.

   Beh: B ist genau dann positiv definit, wenn $\frac{p}{2(p+1)} + \frac{q}{2(q+1)} + \frac{r}{2(r+1)} < 1$.

   „$\Rightarrow$" Ist B pos. def., so muss $B(\frac{1}{p+1}, \dots, \frac{p}{p+1}, \frac{1}{q+1}, \dots, \frac{q}{q+1}, \frac{1}{r+1}, \dots, \frac{r}{r+1}, 1) > 0$ gelten. Da aber $C_p(\frac{1}{p+1}, \dots, \frac{p}{p+1}, 1) = 0$, $C_q(\frac{1}{q+1}, \dots, \frac{q}{q+1}, 1) = 0$ und $C_r(\frac{1}{r+1}, \dots, \frac{r}{r+1}, 1) = 0$ folgt dann $1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)} > 0$.

   „$\Leftarrow$" Ist die Ungleichung erfüllt, so ist für $(x_i, y_i, z_i, a) \neq 0$ zu zeigen, dass $B(x_i, y_i, z_i, a) > 0$. Für $a \neq 0$ ist dies offensichtlich, da C_p, C_q, C_r positiv semidefinit sind. Ist nun $(x_i, y_i, z_i, 0) \neq 0$, so ist nach 2) entweder $C_p(x_1, \dots, x_p, 0) > 0$, $C_q(y_1, \dots, y_q, 0) > 0$, oder $C_r(z_1, \dots, z_r, 0) > 0$.

   Die Bedingung kann noch folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{2(p+1)} + \frac{q}{2(q+1)} + \frac{r}{2(r+1)} < 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} < 2 \\
\Longleftrightarrow\ & 1 - \frac{1}{p+1} + 1 - \frac{1}{q+1} + 1 - \frac{1}{r+1} < 2 \\
\Longleftrightarrow\ & 1 < \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1}
\end{aligned}$$

4) Wir können annhemen $p \leq q \leq r$.[1] Setze $A := \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1}$. Nun müssen alle möglichen Fälle durchgegangen werden.

   a) $p = 0$, q und r beliebig (A_n). Dann ist $A > 1$, also B positiv definit.
   b) $p = 1$, $q = 1$ und r beliebig (D_n). Dann ist $A > 1$, also B positiv definit.
   c) $p = 1$, $q = 2$ und $r = 2, 3, 4$ (E_6, E_7, E_8). Dann ist $A > 1$, also B positiv definit.
   d) $p = 1$, $q = 2$ und $r \geq 5$. Dann ist $A \leq 1$, also B nicht positiv definit.
      $p = 1$, $q = 3$ und $r \geq 3$. Dann ist $A \leq 1$, also B nicht positiv definit.
      $p \geq 2$, $q \geq 2$ und $r \geq 2$. Dann ist $A \leq 1$, also B nicht positiv definit.

□

Definition. Ein Vektor $x \in \mathfrak{E}_\Gamma$ heißt *Wurzel*, falls es ein $\beta \in \Gamma_0$, $w \in W$ gibt mit $x = w(\bar{\beta})$. Die Vektoren $\bar{\beta}$ ($\beta \in \Gamma_0$) heißen einfache Wurzeln.

[1] ansonsten kann der Graph aus Abildung 2 gedreht werden.

Lemma 3. *Sei x eine Wurzel.*

i) x ist ein ganzzahliger Vektor und $B(x) = 1$.

ii) $-x$ ist eine Wurzel.

iii) Entweder ist $x > 0$ oder $-x > 0$.

Beweis.

i) Alle $\bar{\beta}$ ($\beta \in \Gamma_0$) sind ganzzahlig und w erhählt das ganzzahlige Gitter (siehe Lemma 1). Es ist $B(x) = B(w(\bar{\beta})) = B(\bar{\beta}) = 1$.

ii) Es ist $-x = -w(\bar{\beta}) = w(-\bar{\beta}) = w(\sigma_{\bar{\beta}}(\bar{\beta}))$.

iii) Diese Aussage wird nur für den Fall, dass B positiv definit ist, benötigt und auch nur hierfür bewiesen.
Es ist $x = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_k}(\bar{\beta})$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta \in \Gamma_0$. Wir lassen nun y die Vektoren $\bar{\beta}, \sigma_{\alpha_k}(\bar{\beta}), \dots, \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_k}(\bar{\beta})$ durchlaufen. Es reicht dann zu zeigen, dass entweder $\sigma_\alpha(y) > 0$ oder $y = \bar{\alpha}$ (d.h. $-\sigma_\alpha(y) = \bar{\alpha} > 0$), falls $y > 0,\ \alpha \in \Gamma_0$.
Es ist $B(y) = B(\bar{\beta}) = 1$ und $B(\bar{\alpha}) = 1$, also gilt $| < \bar{\alpha}, y > | \leq 1$ (Cauchy-Schwarz). Außerdem ist $2 < \bar{\alpha}, y > \in \mathbb{Z}$.[2] Somit nimmt $2 < \bar{\alpha}, y >$ einen der Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ an.

a) $2 < \bar{\alpha}, y >= 2$. Dann ist $< \bar{\alpha}, y >= 1$, d.h. $y = \bar{\alpha}$.

b) $2 < \bar{\alpha}, y > \leq 0$. Dann ist $\sigma_\alpha(y) = \underbrace{y}_{>0} \underbrace{-2 < \bar{\alpha}, y > \bar{\alpha}}_{\geq 0} > 0$.

c) $2 < \bar{\alpha}, y >= 1$. Wegen $2 < \bar{\alpha}, y >= 2y_\alpha - \sum_{l \in \Gamma^\alpha} y_{\gamma(l)}$ folgt $2y_\alpha = 1 + \sum_{l \in \Gamma^\alpha} \underbrace{y_{\gamma(l)}}_{\geq 0}$ und somit $y_\alpha \geq 1$, da y ganzzahlig ist. Also ist $\sigma_\alpha(y) = y - \bar{\alpha} > 0$.

□

Definition. Sei Γ ein Graph ohne Schleifen und sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Nummerierung der Knoten. Dann nennt man die Elemente $c = \sigma_{\alpha_n} \dots \sigma_{\alpha_1}$ (c hängt von der gewählten Nummerierung ab) *Coxeter–Transformation.*

Lemma 4. *Sei die quadratische Form B für den Graphen Γ positiv definit.*

i) c hat in $\mathfrak{E}_\Gamma$ keinen invarianten Vektor ungleich Null.

ii) Ist $0 \neq x \in \mathfrak{E}_\Gamma$, dann ist $c^i(x) \not> 0$ für ein $i \in \mathbb{N}$.

Beweis.

i) Sei $y \in \mathfrak{E}_\Gamma$ mit $c(y) = y$. Die Abbildungen $\sigma_{\alpha_n}, \dots, \sigma_{\alpha_2}$ ändern nicht die Koordinate, die zu α_1 gehört. D.h. $(\sigma_{\alpha_i}(z))_{\alpha_1} = z_{\alpha_1}$ für alle $z \in \mathfrak{E}_\Gamma,\ i \neq 1$. Somit gilt $(\sigma_{\alpha_1}(y))_{\alpha_1} = (\sigma_{\alpha_n} \dots \sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}(y))_{\alpha_1} = (c(y))_{\alpha_1} = y_{\alpha_1}$ und folglich $\sigma_{\alpha_1}(y) = y$.
Analog zeigt man $\sigma_{\alpha_2}(y) = y,\ \dots\ ,\ \sigma_{\alpha_n}(y) = y$.
Für alle $\alpha \in \Gamma_0$ gilt also $y = \sigma_\alpha(y) = y - 2 < \bar{\alpha}, y > \bar{\alpha}$, d.h. $< \bar{\alpha}, y >= 0$. Da die Vektoren $\bar{\alpha}$ ($\alpha \in \Gamma_0$) eine Basis von $\mathfrak{E}_\Gamma$ bilden und B nicht ausgeartet ist, folgt $y = 0$.

[2] dies sieht man an der Spiegelungsformel (alle Wurzeln sind ganzzahlig).

ii) Da W eine endliche Gruppe ist, gilt $c^k = id$ für ein $k \in \mathbb{N}_1$. Ang. $x, c(x), \ldots, c^{k-1}(x)$ seien positiv. Dann würde gelten $y := x + c(x) + \ldots + c^{k-1}(x) > 0$, also insbesondere $y \neq 0$. Es gilt aber $c(y) = y$ $\lightning$ zu i).

$\square$

2 Satz von Gabriel

Sei (Γ, Λ) ein orientierter Graph und $\mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ die Kategorie der Darstellungen dieses Graphen. Für jedes Objekt $V \in \mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ betrachten wir die Menge der Dimensionen dim V_α als Vektor in $\mathfrak{E}_\Gamma$ und bezeichnen diesen mit dim V (also dim $V := (\dim V_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0}$).

Satz 1 (Gabriel)**.**

i) Gibt es in $\mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ nur endlich viele unzerlegbare Objekte (bis auf Isomorphie), dann stimmt Γ mit einem der Graphen A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 überein.

ii) Sei Γ ein Graph vom Typ A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 und Λ eine Orientierung auf Γ. Dann gibt es in $\mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ nur endlich viele unzerlegbare Objekte (bis auf Isomorphie). Und die Abbildung $V \mapsto$ dim V liefert eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von unzerlegbaren Objekten und positiven Wurzeln in $\mathfrak{E}_\Gamma$.

Beweis.

i) Betrachte die Objekte $(V, f) \in \mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ mit Dimension dim $V = m = (m_\alpha)$. Wählen wir für jeden Raum V_α eine Basis, dann ist das Objekt (V, f) vollständig definiert durch das Tupel $(A_l)_{l \in \Gamma_1}$, wobei A_l die darstellende Matrix von f_l (bzgl. der gewählten Basis) ist. In jedem Raum können wir die Basis durch eine invertierbare $(m_\alpha \times m_\alpha)$–Matrix g_α ändern. Die Matrizen A_l werden dann ersetzt durch

$$A'_l = g_{\beta(l)}^{-1} \, A_l \, g_{\alpha(l)}. \qquad (**)$$

Sei A die Menge aller Tupel $(A_l)_{l \in \Gamma_1}$ und G die Menge aller Tupel $(g_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0}$ (g invertierbar). G ist eine Gruppe bzgl. (komponentenweiser) Matrixmultiplikation und G operiert auf A vermöge Gleichung (**).
Zwei Objekte von $\mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ mit gegebener Dimension m sind genau dann isomorph, wenn die zugehörigen Tupel $(A_l)_{l \in \Gamma_1}$, $(B_l)_{l \in \Gamma_1}$ in einer Bahn von G liegen (bzgl. geeigneter Basen sind die darstellenden Matrizen beider Objekte gleich).
Gibt es in $\mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ nur endlich viele unzerlegbare Objekte, dann gibt es nur endlich viele Objekte der Dimension m (bis auf Isomorphie). Denn jedes Objekt ist isomorph zu einer direkten Summe unzerlegbarer Objekte und jedes (unzerlegbare) Objekt hat eine bestimmte Dimension. D.h. es gibt nur endliche viele Möglichkeiten, um ein Objekt mit einer vorgegebenen Dimension zu konstruieren.
A ist also eine Vereinigung von endlich vielen Bahnen. Folglich gilt dim $A \leq$ dim $G - 1$ (G hat eine 1–dimensionale Untergruppe $G_0 = \{(\lambda I_{v_\alpha})_{\alpha \in \Gamma_0} \mid \lambda \in K^*\}$, die auf A identisch operiert).[3] Es ist dim $G = \sum_{\alpha \in \Gamma_0} m_\alpha^2$ und dim $A = \sum_{l \in \Gamma_1} m_{\alpha(l)} m_{\beta(l)}$. D.h. die Bedingung dim $A \leq$ dim $G - 1$ kann umgeschrieben werden zu $B(m) \geq 1$ bzw. $B(m) > 0$ (falls $m \neq 0$). Es gilt $B((x_\alpha)) \geq B((|x_\alpha|))$ für alle $x = (x_\alpha) \in \mathfrak{E}_\Gamma$. Also ist B positiv definit. Nach Lemma 2 gilt dies nur für die Graphen A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

[3] hier wird mit Dimensionen von „algebraischen Varietäten“ gerechnet.

ii) Erinnerung:

> Sei β ein $(+)$–zugänglicher Knoten bzgl. Λ und $V \in \mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ ein unzerlegbares Objekt. Dann gilt einer der beiden Fälle:
>
> - $F_\beta^+(V)$ ist ein unzerlegbares Objekt, $F_\beta^- F_\beta^+(V) = V$ und es gilt $\dim F_\beta^+(V) = \sigma_\beta(\dim V) > 0$
> - $V = L_\beta$, $F_\beta^+(V) = 0$ und es gilt $\sigma_\beta(\dim V) < 0$
>
> Eine analoge Aussage gilt für (-)–zugängliche Knoten.

Korollar:

> Seien die Knoten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ $(+)$–zugänglich bzgl. Λ und sei $V \in \mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ ein unzerlegbares Objekt. Setze $V_j = F_{\alpha_j}^+ \dots F_{\alpha_1}^+(V)$ und $m_j = \sigma_{\alpha_j} \dots \sigma_{\alpha_1}(\dim V)$ $(0 \leq j \leq k)$. Sei i der größte Index, so dass $m_j > 0$ für $j \leq i$. Dann sind die V_j unzerlegbare Objekte und $V = F_{\alpha_1}^- \dots F_{\alpha_j}^-(L_{\alpha_{i+1}})$.
> Eine analoge Aussage gilt für Folgen von (-)–zugänglichen Knoten.

Für Graphen vom Typ A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 ist B positiv definit. Nach Lemma 1 iv) ist die Weyl–Gruppe dann endlich, d.h. es gibt nur endlich viele Wurzeln. Es reicht also zu zeigen, dass wir durch $V \mapsto \dim V$ eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von unzerlegbaren Objekten und positiven Wurzeln in $\mathfrak{E}_\Gamma$ erhalten. Dazu müssen wir zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert, injektiv und surjektiv ist.
Wir wählen eine Nummerierung $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ der Knoten von Γ, so dass $\alpha(l)$ einen größeren Index hat als $\beta(l)$ für alle Kanten $l \in \Gamma_1$.[4] Sei $c = \sigma_{\alpha_n} \dots \sigma_{\alpha_1}$ die zugehörige Coxeter–Transformation und sei $z \in \mathfrak{E}_\Gamma$. Nach Lemma 4 ii) ist dann $c^k(z) \not> 0$ für ein k.[5] Die Folge $\beta_1, \dots, \beta_{nk} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n; \ \dots \ ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (k-mal) ist $(+)$–zugänglich bzgl. Λ und $\sigma_{\beta_{nk}} \dots \sigma_{\beta_1}(z) = c^k(z) \not> 0$.

Wohldefiniertheit / Injektivität:

> Sei $V \in \mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ ein unzerlegbares Objekt. Dann ist $\sigma_{\beta_{nk}} \dots \sigma_{\beta_1}(\dim V) \not> 0$ für ein k. Nach dem Korrolar gibt es dann einen Index $i < kn$ (abhängig nur von $\dim V$), so dass $V = F_{\beta_1}^- \dots F_{\beta_i}^-(L_{\beta_{i+1}})$ und $\dim V = \sigma_{\beta_1} \dots \sigma_{\beta_i}(\bar{\beta}_{i+1})$. D.h. $\dim V$ ist eine positive Wurzel und V ist durch den Vektor $\dim V$ bis auf Isomorphie bestimmt (insbesondere sind 2 unzerlegbare Objekte mit gleicher Dimension isomorph zueinander).

Surjektivität:

> Sei x eine positive Wurzel. Es ist $\sigma_{\beta_{nk}} \dots \sigma_{\beta_1}(x) \not> 0$ für ein k. Sei i der letzte Index, so dass $\sigma_{\beta_i} \dots \sigma_{\beta_1}(x) > 0$. Im Beweis von Lemma 3 iii) haben wir gezeigt:
>
> Ist $y > 0$ eine Wurzel, $\alpha \in \Gamma_0$, dann gilt entweder $\sigma_\alpha(y) > 0$ oder $y = \bar{\alpha}$.
>
> Also ist $\sigma_{\beta_i} \dots \sigma_{\beta_1}(x) = \bar{\beta}_{i+1}$. Die Folge $\beta_{nk}, \dots, \beta_1$ ist (-)–zugänglich bzgl. Λ, d.h. $\beta_i, \dots, \beta_1$ ist (-)–zugänglich bzgl. $\sigma_{\beta_{i+1}} \dots \sigma_{\beta_{nk}}(\Lambda) = \sigma_{\beta_i} \dots \sigma_{\beta_1}(\Lambda)$.[6]

[4] wie man eine solche Nummerierung findet, siehe Anhang.
[5] hier geht ein, dass B positiv definit ist.
[6] es gilt $\sigma_{\beta_1} \dots \sigma_{\beta_{nk}}(\Lambda) = \Lambda$ (die Orientierung von jeder Kante wird 2k-mal umgedreht).

Aus dem Korrolar folgt somit, dass $V := F^-_{\beta_1} \dots F^-_{\beta_i}(L_{\beta_{i+1}}) \in \mathfrak{L}(\Gamma, \Lambda)$ ein unzerlegbares Objekt ist und $\dim V = \sigma_{\beta_1} \dots \sigma_{\beta_i}(\beta_{i+1}) = x$.

□

Literatur

[1] I.N. Bernstein - I.M. Gelfand - V.A. Ponomarev: *Coxeter Functors and Gabriel's Theorem*, Russian Math. Surveys 28 (1973), no. 2, 17-32

Anhang

Wie findet man eine Nummerierung der Knoten von einem (endlichen) orientierten Graphen, ohne orientierte Kreise, so dass für jede Kante der Startknoten einen größeren Index hat als der Endknoten?

Jeder Graph ohne orientierte Kreise besitzt einen $(+)$–zugänglichen Knoten, d.h. einen Knoten, von dem aus keine Kanten starten. Um so einen Knoten zu finden, beginnt man bei einem beliebigen Knoten und bewegt sich dann in Richtung (des Endknotens) einer Kante. Da es keine orientierten Kreise gibt, kann man nicht mehrfach zu einem gleichen Knoten kommen. Weil der Graph endlich ist, muss man also irgendwann bei einem Knoten ankommen, von dem keine Kanten mehr wegführen.
Nun sucht man sich einen $(+)$–zugänglichen Knoten von dem Graphen aus und nummeriert diesen mit „1“. Anschließend entfernt man alle Kanten, die diesen Knoten enthalten. Der neue Graph hat wieder mindestens einen $(+)$–zugänglichen Knoten, welcher mit „2“ nummeriert wird. Durch diese Vorgehensweise erhält man offensichtlich die gewünscht Nummerierung. Entsteht zwischendurch ein unzusammenhängender Graph, so kann die Nummerierung bei einem der Teilgraphen fortgesetzt werden, die anderen Teilgraphen werden danach nummeriert (die Reihenfolge, in der die Teilgraphen nummeriert werden, spielt dabei keine Rolle).