Seminarvortrag

Stefanie Hittmeyer und Björn Hoffmann

Ziel dieses Vortrages ist:

$$\text{Die Killing-Form ist nicht ausgeartet } \Leftrightarrow Rad(L) = 0$$

zu beweisen. Wir geben die jeweiligen Definitionen und Beispiele an und werden die obige Äquivalenz beweisen.

Definition (Killing-Form)**.**
Sei L eine Lie Algebra. Definiere für $x, y \in L$ die *Killing-Form*:

$$\kappa(x, y) = tr(ad(x)ad(y))$$

Bemerkung.
Die Killing-Form ist eine symmetrische Bilinearform und assoziativ im folgenden Sinne:

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$$

Definition (Radikal einer Lie-Algebra)**.**
Sei L eine Lie-Algebra. Definiere $Rad(L)$ *das Radikal von* L, als das größte, auflösbare Ideal von L, d.h., ist S ein auflösbares Ideal von L, so ist $S \subset Rad(L)$.

Beispiel.
Ist L eine einfache Lie-Algebra so ist $Rad(L) = 0$, denn: Ist $L \neq 0$ eine einfache Lie-Algebra so ist L nicht auflösbar, da $L^{(i)} = L$ für jedes i gilt.

Bemerkung.
$Rad(L)$ existiert und ist eindeutig bestimmt, denn es gilt: Sind I, J auflösbare Ideale von L, so ist auch $I + J$ auflösbar (vgl. Prop. 1.2(c) aus dem Vortrag über das Cartan Kriterium).
Ist also $I = Rad(L)$ und J ein weiteres auflösbares Ideal, so ist $I + J = I$ wegen der Maximalität von I und dann $J \subset I$.

Ist $Rad(L) = 0$ und $L \neq 0$, so heißt L *halbeinfach.*

Definition (Radikal einer Bilinearform)**.**
Sei β eine symmetrische Bilinearform. Dann heißt

$$rad(\beta) = \{x \in L \ : \beta(x, y) = 0 \forall y \in L\}$$

das *Radikal von* β.
Ist $rad(\beta) = 0$, so heißt β *nicht ausgeartet.*

Beispiel.
Betrachte die Killing-Form κ auf einer Lie-Algebra L. Dann ist $rad(\kappa) = \text{Kern}(ad)$, und $rad(\kappa)$ ist ein Ideal von L.

Aus der Linearen Algebra wissen wir: Ist β eine symmetrische Bilinearform, dann ist β genau dann nicht ausgeartet, wenn die Matrix $(\beta(x_i, x_j))_{ij}$ invertierbar ist, für eine Basis $x_1, \dots, x_n$. Dazu ein Beispiel:

Beispiel.
Sei $L = sl_2$ und betrachte die Standardbasis (E, F, H) mit $E = E_{12}, F = E_{21}$ und $H = E_{11} - E_{22}$. Dann ist

$$ad(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ad(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ad(E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt für κ:

$$det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = -128 \neq 0$$

Also ist κ nicht ausgeartet.

Nun zu dem Satz, den wir schon in der Einleitung erwähnt haben. Dieser soll jetzt beweisen werden:

Satz 1.
Genau dann ist $Rad(L) = 0$, wenn die Killing-Form nicht ausgeartet ist.

Wir werden Folgendes zeigen:
Genau dann besitzt $L \neq 0$ keine von Null verschiedenen, abelschen Ideale, wenn die Killing-Form nicht ausgeartet ist.

Bemerkung.
Es gilt:
$L \neq 0$ besitzt keine von Null verschiedenen, abelschen Ideale genau dann, wenn $Rad(L) = 0$.

$\Leftarrow$: Sei $Rad(L) = 0$. Da abelsche Ideale auflösbar und diese in $Rad(L)$ enthalten sind, ist die Aussage klar.
$\Rightarrow$: Angenommen $Rad(L) \neq 0$. Dann ist $S = Rad(L)$ auslösbar, und es gilt:

$$S^{(n-1)} = [S^{(n-2)}, S^{(n-2)}] \neq 0 \text{ und } S^{(n)} = 0$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $S^{(n-1)}$ abelsch und ein Ideal von L. Widerspruch.

$\square$

Nun zu dem Beweis des Satzes:

Beweis.
$\Rightarrow$*: Sei $Rad(L) = 0$ und S das Radikal von κ. Dann ist $tr(ad(x)ad(y)) = 0$ für alle*

$x \in S$ und $y \in L$, insbesondere für $y \in [S, S]$. Mit dem Korollar nach dem Cartan-Kriterium folgt, dass S auflösbar ist. Dann ist $S \subset Rad(L) = 0$, also $S = 0$, und κ ist nicht ausgeartet.

$\Leftarrow$: Sei nun $S = 0$. Wir zeigen: Jedes abelsche Ideal I von L ist in S enthalten. Sei also $x \in I, y \in L$. Dann ist $ad(x)ad(y) \ : L \to L$ mit $(ad(x)ad(y))(L) \subset I$ und $(ad(x)ad(y))^2 \ : L \to [I, I] = 0$, da I abelsch ist. Also ist $ad(x)ad(y)$ nilpotent und damit $0 = tr(ad(x)ad(y)) = \kappa(x, y)$. Dann ist $I \subset S = 0$.

□