Seminar "Höhere Linare Algebra"

Der Satz von Lie

Nancy Oschmann und Stefan Höppner
SS 2006

Sei $\mathbb{F}$ algebraisch abgeschlossen und *char* $\mathbb{F} = 0$.

Satz 0.1. *Sei L eine auflösbare Unteralgebra der $gl(V)$, V endlich dimensional. Wenn $V \neq 0$ gilt, dann existiert ein gemeinsamer Eigenvektor für alle Endomorphismen in L.*

Beweis. Beweisidee: Der Beweis erfolgt über Induktion nach der Dimension von L, wobei der Fall $dim\ L = 0$ trivial ist. Die Idee ist

(1) ein Ideal K mit Codimension 1 zu finden,

(2) per Induktion anzunehmen, dass gemeinsame Eigenvektoren für K existieren,

(3) zu zeigen, dass der Raum solcher Eigenvektoren L-invariant ist,

(4) in diesem Raum einen Eigenvektor für ein $z \in L$ zu finden, damit $L = K + \mathbb{F}z$ erfüllt ist.

Schritt (1):
Wenn L auflösbar ist, enthält es natürlich $[LL]$ (da L Unteralgebra). $L/[LL]$ ist abelsch, d.h. jeder Unterraum ist ein Ideal. Man wähle einen Unterraum mit Kodimension 1, dann ist sein Urbild K ein Ideal mit Kodimension 1 in L (mit $[LL] \subseteq L$).

Schritt (2): Da K auflösbar ist, ist der Induktionsanfang trivial (denn: $K = 0 \Rightarrow L$ ist abelsch mit Dimension 1). Auf Grund der Induktionsannahme existiert ein $v \in K$ mit v gemeinsamer Eigenvektor.
Sei $y \in K$, dann gilt: $y.v = \lambda(y)v, \lambda : K \to \mathbb{F}$ linear. Wähle λ fest, dann ist $W = \{v \in V \mid y.v = \lambda(y)v, \forall y \in K\}$; d.h. W Unterraum mit $W \neq 0$.

Schritt (3): Sei $w \in W, x \in L, y \in K, y$ beliebig.

$$yx.w = xy.w - [x, y].w = \lambda(y)x.w - \lambda([x, y])w \text{ (da } K \text{ Ideal in } L).$$

Es bleibt also $\lambda([x, y]) = 0$ zu zeigen.
Sei nun $w \in W, x \in L$ fest gewählt und $n > 0$ die kleinste Zahl für die $w, x.w, \ldots, x^n.w$ linear abhängig sind. Sei W_i der Unterraum, welcher von $w, x.w, \ldots, x^{i-1}.w$ aufgespannt wird (setze $W_0 = 0$). Daraus folgt, dass $dim\ W_n = n$, $W_{n+1} = W_n$ $(i \geq 0)$ und $x : W_n \to W_n$.

Ausgehend von der Basis $w, x.w, \ldots, x^{n-1}.w$ von W_n nehmen wir an dass y durch eine obere Dreiecksmatrix mit $\lambda(y)$ auf der Hauptdiagonalen repräsentiert wird. Dies folgt direkt aus:

$$yx^i.w \equiv \lambda(y)x^i.w \ (mod \ W_i),$$

was wir durch Induktion zeigen werden.
Der Fall $i = 0$ ist offensichtlich. Es gilt: $yx^i.w = yxx^{i-1}.w = xyx^{i-1}.w - [x, y]x^{i-1}.w$. Es gilt nach Induktionsvorraussetzung $yx^{i-1}.w = \lambda(y)x^{i-1}.w + w'$ $(w' \in W_{i-1})$; und $x : W_{i-1} \to W_i$ (nach Konstruktion). Somit ist die Aussage bewiesen und W_i ist y-invariant für alle i.
Daraus folgt, dass $Tr_{W_n}(y) = n\lambda(y)$ gilt. Dies wiederum ist wahr für Elemente aus K mit der speziellen Form $[x, y]$. Aber W_n ist sowohl x-, als auch y-invariant. D.h. $[x, y]$ ist ein Kommutator von zwei Endomorphismen von W_n; seine Spur ist also 0. Daraus folgt also $n\lambda([x, y]) = 0$ und da $char \ \mathbb{F} = 0$ folgt $\lambda([x, y]) = 0$ wie gefordert.

Schritt (4): Sei $L = K + \mathbb{F}z, z \in L - K$. Da $\mathbb{F}$ algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein gemeinsamer Eigenvektor $v_0 \in W$ zu z (für einige Eigenwerte von z). Dann ist v_0 natürlich ein gemeinsamer Eigenvektor von L (und λ kann zu einer linearen Funktion von L erweitert werden so dass $x.v_0 = \lambda(x)v_0, \ x \in L$).
Also: sei $v_0 \in W$ Eigenvektor zu $z \in L - K$. Dann gilt $z.v_0 = \mu v_0$. Sei nun $x \in L$ und $x = az + y, \ y \in K$.
$\Rightarrow x.v_0 = az.v_0 + y.v_0 = a\mu v_0 + \lambda(y)v_0 = (a\mu + \lambda(y))v_0$ □

Definition:

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Dann nennt man eine Kette von Unterräumen $0 = U_0 \subset U_1 \subset ... \subset U_n$ mit dim $U_i = i$ eine (vollständige) Fahne.

Korollar 0.1. *(Satz von Lie):*
Sei L eine auflösbare Unteralgebra von gl(V), dim V = $n < \infty$. Dann stabilisiert L eine Fahne in V (mit anderen Worten: Die Matrizen von L sind bzgl. einer geeigneten Basis obere Dreiecksmatrizen.)

Beweis. vollständige Induktion nach dim V:
Induktionsanfang: dim V = 1.
Induktionsschritt: Sei dim V > 1.
Nach Satz 1 existiert ein v ∈ V mit x.v = λ(x)v
Sei U = span v
U ist stabil unter L, da v Eigenvektor zu jedem Endomorphismus ist.
Sei $\pi : V \longrightarrow V/U$
⇒ dim V/U = n-1
Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Fahne:
$0 = U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_{n-1} = V/U$
⇒ Das Urbild der Fahne ist: $0 \subset U \subset U_1 + U \subset ... \subset U_{n-1} + U = V$
Die Summen sind sogar direkte Summen. Angenommen es existiert ein j mit $U_j + U = U_j$. Dann gilt dies auch für alle $i > j$, insbesondere für $i = n - 1$. Nach Konstruktion von π muss aber $U_{n-1} + U$ direkte Summe sein.

□

Lemma 0.1. *Sei L eine Lie Algebra. Wenn L auflösbar ist, dann sind auch alle homomorphen Bilder von L auflösbar.*

Beweis. Sei ϕ : L $\rightarrow$ M ein Epimorphismus.
Dann gilt $\phi(L^i) = M^i$

Beweis durch vollständige Induktion nach i
IA: $i = 0$ klar
IS: $\phi(L^i) = \phi([L^{i-1}, L^{i-1}]) = [\phi(L^{i-1}), \phi(L^{i-1})] = [M^{i-1}, M^{i-1}] = M^i$

$\Rightarrow$ für i hinreichend groß gilt: $M^i = \phi(L^i) = \phi(0) = 0$

$\square$

Korollar 0.2. *Sei L eine auflösbare Lie-Algebra. Dann existiert eine Kette von Idealen von L mit $0 = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_n = L$, so dass dim $L_i = i$ ist.*

Beweis. Sei ϕ: L $\rightarrow$ gl(V) endlich dimensionale Darstellung von L. Dann ist ϕ(L) auflösbar ($\rightarrow$ Lemma) und stabilisiert eine Fahne in V (Satz von Lie). Sei ϕ zum Beispiel die adjungierte Darstellung.
$\Rightarrow [L, L_i] \subseteq L_i$
Dies ist aber nach Definition ein Ideal. Somit ist $0 = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_n = L$ eine Kette von Idealen mit dim L_i=i

$\square$

Korollar 0.3. *Sei L eine auflösbare Lie-Algabra. Dann folgt für $x \in$ [L,L], dass $ad_L x$ nilpotent ist. Insbesondere ist [L,L] nilpotent.*

Beweis. Nach Korollar B gibt es eine Kette von Idealen
$0 = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_n = L$
Sei $x_1, ..., x_n$ Basis von L mit span $x_1, ..., x_i$= L_i.
$\Rightarrow ad_{L_i} L = [L_i, L] \subseteq L$, da L_i Ideale sind.
$\Rightarrow$ Die Matrizen von ad L liegen in t(n,F) (obere Dreiecksmatrizen).
$\Rightarrow$ Die Matrizen von [adL,adL]=$ad_L[L, L]$ liegen in n(n,F) (Menge der nilpotenten oberen Dreiecksmatrizen).
$\Rightarrow ad_L x$ ist für jedes x $\in$ [L,L] nilpotent.
$\Rightarrow ad_{[L,L]}$x ist nilpotent.
$\Rightarrow$ [L,L] ist nilpotent ($\rightarrow$ Satz von Engel)

$\square$