

Seminar "Höhere Lineare Algebra"

Thema 9:

Darstellungen von Köchern sind Moduln über der Wege-Algebra Konstruktion der unzerlegbaren projektiven Darstellungen

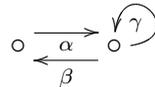
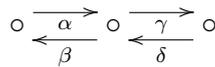
Nancy Oschmann, Martina Schulz
SoSe 2006

1 Definitionen

Definition 1.1. Ein Köcher $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ ist ein orientierter Graph, (Kreise und Schleifen werden dabei nicht ausgeschlossen) mit Γ_0 die Menge der Knoten und Γ_1 die Menge der Kanten (Pfeile) zwischen jeweils zwei Knoten.

Im folgenden betrachten wir nur endliche Köcher d.h., die Mengen Γ_0 und Γ_1 sind endlich.

Beispiele



Definition 1.2. Sei Γ ein Köcher. Ein Weg der Länge $l \geq 1$ ist eine Folge $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in \Gamma_1$ von gerichteten Kanten ausgehend vom Anfangspunkt a zum Endpunkt b , wobei $a, b \in \Gamma_0$.

Schreibweise: $(a|\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l|b)$

Visualisiert

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

Der Weg der Länge $l = 0$ wird der triviale oder auch stationäre Weg ϵ_a genannt. Ein Weg der Länge $l \geq 1$ wird Kreis genannt, wenn der Startknoten gleich dem Endknoten ist. Ein Kreis der Länge 1 wird Schleife genannt.

Beispiel



Definition 1.3. Sei Γ ein Köcher, K Körper. Die Wege-Algebra $k\Gamma$ von Γ ist diejenige k -Algebra, die als Basis des zugrunde liegenden k -Vektorraums die Menge aller Wege $(a|\alpha_1 \dots \alpha_l|b)$ der Länge $l \geq 0$ in Γ hat.

Das Produkt von zwei solchen Basiselementen $(a|\alpha_1 \dots \alpha_l|b)$ und $(c|\beta_1 \dots \beta_k|d)$ von $k\Gamma$ ist definiert durch:

$$(a|\alpha_1 \dots \alpha_l|b)(c|\beta_1 \dots \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1 \dots \alpha_l\beta_1 \dots \beta_k|d)$$

(wobei δ_{bc} das Kronecker-Symbol sein soll).

Beispiele

1. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Daraus ergibt sich als Basis für die Wege-Algebra:

$$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$$

2. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 1$$

Daraus ergibt sich als Basis für die Wege-Algebra:

$$\{\epsilon_1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$$

(Es ist $(\alpha^i)(\alpha^j) = (\alpha^{i+j})$ für $i \geq 0$ und $j \geq 0$.)

$k\Gamma$ ist isomorph zum Polynomring $K[X]$ in einer Variablen mit der Identifikation $\alpha^i \mapsto X^i$ für $i \geq 0$.)

3. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$\begin{array}{ccc} 2 & & \\ & \searrow \alpha & \\ & & 1 \\ 3 & \xrightarrow{\beta} & \\ & \nearrow \gamma & \\ 4 & & \end{array}$$

Als Basis für die Wege-Algebra ergibt sich somit:

$$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma\}$$

4. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\beta} & 3 \\ \alpha \downarrow & & \delta \downarrow \\ 2 & \xrightarrow{\gamma} & 4 \end{array}$$

Es ergibt sich die folgende Basis für die Wege-Algebra:

$$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\gamma, \beta\delta\}$$

Definition 1.4. Ein Idempotent $e \in A$ (A eine Algebra) ist ein von Null verschiedenes Element mit $e^2 = e$. Zwei Idempotenten $e_1, e_2 \in A$ heißen orthogonal, wenn $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Ein primitives Idempotent ist ein Idempotent, das nicht als Summe von Orthogonalen Idempotenten geschrieben werden kann.

Definition 1.5. Ein Links- R -Modul über einem Ring R besteht aus einer abelschen Gruppe $(M, +)$ und einer Multiplikation $R \times M \rightarrow M$, s.d. $\forall r, s \in R$ und $x, y \in M$ gilt:

(i) $r(x + y) = rx + ry$

(ii) $(r + s)x = rx + sx$

(iii) $(rs)x = r(sx)$

Für unitäre Moduln fordert man zusätzlich:

(iv) $1 \cdot x = x$

Ein Rechts- R -Modul ist analog definiert, nur mit $M \times R \rightarrow M$ als Multiplikation.

Ein Bimodul über den Ringen R und S ist ein Rechts- und Links-Modul mit: $r(ms) = (rm)s$ für $r \in R, s \in S, m \in M$.

Definition 1.6. Sei M ein Links- R -Modul und $N \subseteq M$ Untergruppe. Dann ist N ein Untermodul (oder genauer R -Untermodul) wenn für jedes $n \in N$ und jedes $r \in R$ $rn \in N$ gilt.

Definition 1.7. Seien M, N Links- R -Moduln. $f : M \rightarrow N$ ist ein Homomorphismus von R -Moduln, wenn gilt: $\forall m, n \in M, \forall r \in R$

$$f(rm + sn) = rf(m) + sf(n).$$

Ein bijektiver Modul-Homomorphismus ist ein **Isomorphismus** von Moduln. Zwei Moduln werden isomorph genannt, wenn zwischen ihnen ein Modul-Isomorphismus existiert.

Der **Kern** eines Modul-Homomorphismus $f : M \rightarrow N$ ist der Untermodul von M , welcher aus allen Elementen besteht, die durch f auf 0 geschickt werden.

Also:

$$\text{Ker } f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

Das **Bild** eines Modul-Homomorphismus $f : M \rightarrow N$ ist der Untermodul von N , welcher aus allen Elementen besteht, die durch f abgebildet worden sind.

Also:

$$\text{Im } f = \{n \in N \mid \exists m \in M : f(m) = n\}$$

Definition 1.8. Ein Modul M ist endlich erzeugt, wenn endlich viele Elemente $x_1, \dots, x_n \in M$ existieren, sodass alle $m \in M$ als Linearkombination dieser Elemente dargestellt werden kann.

Definition 1.9. Ein freier Modul ist ein Modul, der eine Basis besitzt.

Mit anderen Worten:

Ein freier Modul ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien vom Ring R . (Diese Moduln sind in ihren Eigenschaften sehr ähnlich zu Vektorräumen.)

Im folgenden werden Epimorphismen mit einem Pfeil der Form \twoheadrightarrow kenntlich gemacht.

Definition 1.10. Ein R -Modul P heißt projektiv, falls für jeden Epimorphismus $h : M \rightarrow N$ und jedes $f \in \text{Hom}_R(P, N)$ ein $f' \in \text{Hom}_R(P, M)$ existiert, s.d. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} P & & & & \\ \exists f' \downarrow & \searrow f & & & \\ M & \twoheadrightarrow_h & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nicht jeder Modul ist projektiv.

Ein Gegenbeispiel dafür ist der Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über \mathbb{Z} .

Es existiert keine Abbildung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach \mathbb{Z} , s.d. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & & & \\ \nexists f' \downarrow & \searrow f & & & \\ \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow_h & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Definition 1.11. Ein unzerlegbarer Modul ist ein von Null verschiedener Modul, der nicht als direkte Summe zweier von Null verschiedener Moduln geschrieben werden kann.

Definition 1.12. Ein einfacher Modul ist ein Modul, der als einzige Untermoduln 0 und sich selbst hat.

Definition 1.13. Sei R ein kommutativer Ring, A eine assoziative R -Algebra, so ist ein A -Linksmodul ein R -Modul M zusammen mit einem R -Modulhomomorphismus $A \otimes_R M \rightarrow M, a \otimes m \mapsto am$, s.d. $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$ für $a_1, a_2 \in A, m \in M$.
(Ist R ein Körper, so ist das Tensorprodukt als *normale* Multiplikation zu verstehen.)

2 Vorbemerkungen

Definition 2.1. Sei $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Das Produkt der Moduln $M_i, i \in I$ ist wie folgt definiert:

$$\prod_{i \in I} M_i := \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i \mid f(i) \in M_i, \forall i \in I\},$$

wobei $\bigcup_{i \in I} M_i$ die disjunkte Vereinigung der M_i ist.

Die R -Modulstruktur auf $\prod_{i \in I} M_i$ ist gegeben durch:

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) \in M_i,$$

$$(rf)(i) = rf(i) \in M_i.$$

Die Summe der Moduln $M_i, i \in I$ ist:

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{f \in \prod_{i \in I} M_i \mid \text{Träger}(f) < \infty\},$$

wobei $\text{Träger}(f) = \{i \in I \mid f(i) \neq 0\}$ ist.

Die R -Modulstruktur auf $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist gegeben durch:

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) \in M_i,$$

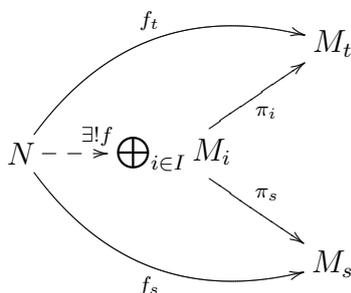
$$(rf)(i) = rf(i) \in M_i.$$

Ist $|I| < \infty$, so gilt: $\bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$.

Universelle Eigenschaft

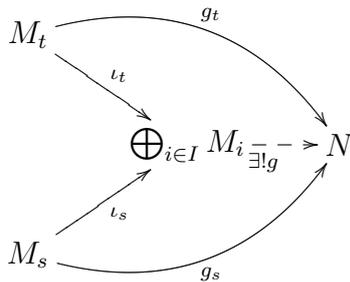
Sei $\pi_i = \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ die kanonische Projektion. Sei N ein R -Modul und sei $\{f_i : N \rightarrow M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von R -Modulhomomorphismen.

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f : N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, s.d. $\forall i \in I$ gilt: $\pi_i \circ f = f_i$.



Sei $\iota_k : M_k \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ die kanonische Einbettung. Sei N ein R -Modul und sei $\{g_i : M_i \rightarrow N\}_{i \in I}$ eine Familie von R -Modulhomomorphismen.

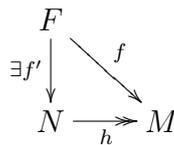
Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $g : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$, s.d. $\forall k \in I$ gilt: $g \circ \iota_k = g_k$.



Dies nennt man die Universelle Eigenschaft.

Proposition 2.1. *Jeder freie Modul ist projektiv.*

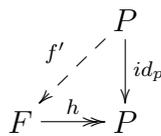
Beweis. Wähle eine Basis für den freien Modul F . Diese sei $\{x_j | j \in J\}$. Setze $f'(x_j) := z_j$ für ein $z_j \in h^{-1}(f(x_j))$. (Dies existiert aufgrund der Surjektivität von h) Dann kommutiert das folgende Diagramm:



Es folgt die Behauptung. □

Proposition 2.2. *Projektive Moduln sind direkte Summanden von freien Moduln.*

Beweis. Sei F freier Modul, P projektiver Modul.



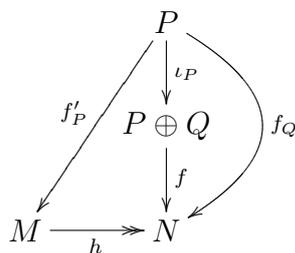
Es ist $id_P \in Hom(P, P)$, und h sei Epimorphismus von F nach P .

Es gibt nur ein $f' \in Hom(P, F)$ mit $h \circ f' = id_P$, da P projektiv ist.

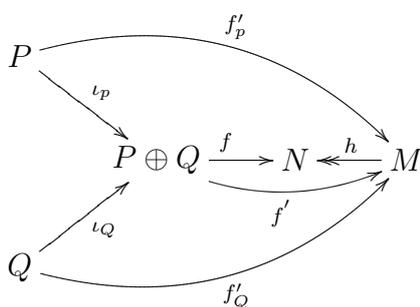
Demnach ist $Im(h) \oplus Kern(h) \simeq F$, (Isomorphiesatz für Moduln) und $Imh \simeq P$ (da h surjektiv). □

Proposition 2.3. *Seien P, Q R -Moduln. Es ist $P \oplus Q$ genau dann projektiv, wenn P und Q projektiv sind.*

Beweis. \Leftarrow : Seien P und Q projektiv. Dann existiert $f'_P : P \rightarrow M$, s.d. das folgende Diagramm kommutiert.

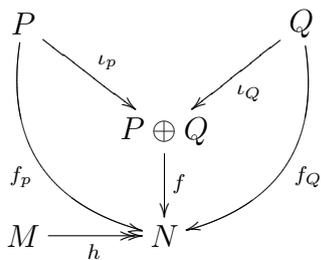


Analog gibt es $f'_Q : Q \rightarrow M$. Es gilt $h \circ f'_P = f_P \circ \iota_P$ und $f \circ f'_Q = f \circ \iota_Q$. Die Existenz von $f' : P \oplus Q \rightarrow M$ folgt aus der universellen Eigenschaft der direkten Summe.

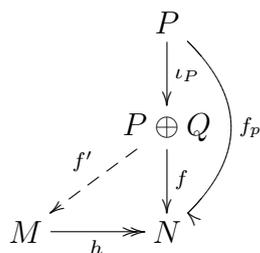


Es gilt: $(h \circ f') \circ \iota_P = h f'_P = f \circ \iota_P$ und $(h \circ f') \circ \iota_Q = h f'_Q = f \circ \iota_Q$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft der direkten Summe folgt: $h \circ f' = f$. Damit ist $P \oplus Q$ projektiv.

\Rightarrow : Sei $P \oplus Q$ projektiv. Benutze wieder die universelle Eigenschaft um $f : P \oplus Q \rightarrow N$ zu konstruieren.



Es gilt $f \circ \iota_P = f_P$, $f \circ \iota_Q = f_Q$. $P \oplus Q$ ist projektiv, also gibt es $f' : P \oplus Q \rightarrow M$ mit $h \circ f' = f$.



Es ist $h \circ (f' \circ \iota_P) = f \circ \iota_P = f_P$. Also ist $f' \circ \iota_P : P \rightarrow M$ der gesuchte Homomorphismus und P projektiv.

Es ist $h \circ (f' \circ \iota_Q) = f \circ \iota_Q = f_Q \Rightarrow Q$ projektiv.
(Völlig analog zeigt man, dass Q projektiv ist.) □

Proposition 2.4. *Sei A eine endlich dimensionale Algebra und $e \neq 0$ ein Idempotent in A .*

- (a) *Sei $Ae = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ freier Modul mit $P_i \neq 0$ und $e_i \in P_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, s.d. $e = e_1 + \dots + e_n$. Dann ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Menge von Null verschiedener orthogonaler Idempotenten mit der Eigenschaft $Ae_i = P_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.*
- (b) *Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ Menge von Null verschiedener orthogonaler Idempotenten, s.d. $e = e_1 + \dots + e_n$. Dann ist Ae_i ein Untermodul von Ae für alle $i = 1, \dots, n$ und $Ae = Ae_1 + \dots + Ae_n$.*
- (c) *$e \in A$ ist ein primitives Idempotent gdw. Ae ein unzerlegbarer projektiver Modul ist.*
- (d) *Das Einselement kann als Summe von primitiven orthogonalen Idempotenten geschrieben werden.*

Beweis. (a) Nach Voraussetzung ist $e \in A$, und es gibt eindeutige Elemente mit $e_i \in P_i$, $i = 1, \dots, n$, $e = e_1 + \dots + e_n$.

Sei $x \in Ae \Rightarrow x = \lambda e$ mit $\lambda \in A$, also $x e = (\lambda e) e = \lambda e = x$. Sei $x_i \in P_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist $x_i = x_i e_1 + \dots + x_i e_n$.

Da $x_i e_j \in P_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ existiert nur eine Möglichkeit x_i als Summe der Elemente von P_j darzustellen. Es folgt $x_i e_j = 0$ für $i \neq j$ und $x_i e_i = x_i$. Es ist $P_i = Ae_i$, also $e_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, da alle $P_i \neq 0$ nach Voraussetzung.

Insbesondere ist $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ und $e_i^2 = e_i$. Somit ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Menge von Null verschiedener orthogonaler Idempotenten.

(b) Es ist $e_i e = e_i e_1 + \dots + e_i e_n = e_i^2 = e_i$, da $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ nach Voraussetzung. Es ist $e_i \in Ae_i$ und somit also $Ae_i \subset Ae$. Wir wollen zeigen, dass sich jedes $x \in Ae$ eindeutig als Summe $x_1 + \dots + x_n$ mit $x_i \in Ae_i$ für $i = 1, \dots, n$ darstellen lässt.

Jedes Element in Ae_i kann so dargestellt werden, also ist nur zu zeigen, dass die Darstellung eindeutig ist, oder - was äquivalent dazu ist - dass $0 = x_1 + \dots + x_n$ mit $x_i \in Ae_i$. Dann ist $x_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Sei $0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ mit $\lambda_i \in Ae_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist $0 = \lambda_1 e_1 e_i + \dots + \lambda_n e_n e_i$. Da $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ folgt $0 = \lambda_i e_i^2 = \lambda_i e_i = x_i$, was zu zeigen war.

(c) Folgt sofort aus (a) und (b) und Proposition 2.3.

(d) Folgt direkt aus (a) und (b). □

Lemma 2.1. *Sei Γ ein Köcher und $k\Gamma$ die dazugehörige Wege-Algebra. Dann gilt:*

(a) $k\Gamma$ ist eine assoziative Algebra.

(b) $k\Gamma$ hat ein Einselement gdw. Γ_0 endlich ist.

(c) $k\Gamma$ ist endlich dimensional gdw Γ endlich ist und keine Kreise besitzt.

Beweis. (a) Da das Produkt von Basiselementen die Hintereinanderschaltung von Wegen ist, folgt die Behauptung sofort.

(b) Es ist klar, dass der Weg der Länge Null ϵ_a ein Idempotent von $k\Gamma$ ist. Da Γ_0 endlich ist, ist $\sum_{a \in \Gamma_0} \epsilon_a$ das Einselement von $k\Gamma$.

Angenommen, Γ_0 ist nicht endlich. Sei $\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i = 1$ das Einselement von $k\Gamma$ (mit $\lambda_i \neq 0 \forall i$ und w_i Wege in Γ). Die Menge Γ'_0 aller Anfangsknoten von w_i hat demnach m Elemente und ist demnach endlich.

Ist $a \in \Gamma_0 \setminus \Gamma'_0 \Rightarrow \epsilon_a \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Widerspruch.

(c) Ist Γ nicht endlich, so ist auch die Basis von $k\Gamma$ nicht endlich, also ist $k\Gamma$ nicht endlich dimensional.

Ist $w = \alpha_1 \dots \alpha_l$ ein Kreis in Γ , so ist $w^t = (\alpha_1 \dots \alpha_l)^t$ für alle $t \geq 0$ ein Basiselement von $k\Gamma$ und demnach ist $k\Gamma$ unendlich dimensional.

Ist Γ endlich und besitzt keine Kreise, so enthält Γ nur endlich viele Wege und somit ist $k\Gamma$ endlich dimensional. □

Korollar 2.1. Sei Γ ein endlicher Köcher. Dann ist $1 = \sum_{a \in \Gamma_0} \epsilon_a$ das Einselement von $k\Gamma$ und die Menge $\{\epsilon_a | a \in \Gamma_0\}$ aller trivialen Wege ist eine vollständige Menge von primitiven orthogonalen Idempotente in $k\Gamma$.

Beweis. Nach Definition der Multiplikation sind die trivialen Wege ϵ_a orthogonale Idempotente in $k\Gamma$.

Da Γ_0 endlich ist, ist $1 = \sum_{a \in \Gamma_0} \epsilon_a$ das Einselement von $k\Gamma$. Also ist zu zeigen, dass die ϵ_a primitiv sind oder, dass die einzigen Idempotente der Algebra $\epsilon_a(k\Gamma)\epsilon_a$ 0 und ϵ_a sind.

Jedes Idempotent ϵ kann in der folgenden Form geschrieben werden: $\epsilon = \lambda \epsilon_a + w$, $\lambda \in K$, w Linearkombination von Kreisen durch a der Länge ≥ 1 .

$0 = \epsilon^2 - \epsilon = (\lambda^2 - \lambda)\epsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2$ ergibt sich mit $w = 0$ $\lambda^2 = \lambda$, also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1 \Rightarrow \epsilon = 0$ oder $\epsilon = \epsilon_a$. □

3 Äquivalenz der Kategorien $Rep \Gamma$ und $f.d.(k\Gamma)$

(Siehe dazu [ARS] Kapitel 3.)

Im Folgenden soll $f.d.(k\Gamma)$ für die Kategorie der endlich dimensionalen Moduln über $k\Gamma$ stehen.

Definition 3.1. Eine Darstellung (V, f) eines Köchers Γ über einem Körper K ist eine Menge von Vektorräumen $\{V(i) | i \in \Gamma_0\}$ zusammen mit k -linearen Abbildungen $f_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$.

Im Folgenden betrachten wir nur endlich-dimensionale Darstellungen, d.h. jeder Vektorraum $V(i)$ hat endliche Dimension über K .

Sei $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ ein **Morphismus** zwischen zwei Darstellungen von Γ über K ist eine Menge $\{h_i : V(i) \rightarrow V'(i)\}_{i \in \Gamma_0}$ von k -linearen Abbildungen, s.d. für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$ in Γ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{h_i} & V'(i) \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow f'_\alpha \\ V(j) & \xrightarrow{h_j} & V'(j) \end{array}$$

kommutiert.

Sind $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ und $g : (V', f') \rightarrow (V'', f'')$ Morphismen zwischen Darstellungen, dann ist die **Komposition** gh definiert als die Menge der Abbildungen $\{g_i h_i | V(i) \rightarrow V''(i)\}_{i \in \Gamma_0}$.

Man erhält der Kategorie der (endlich-dimensionalen) Darstellungen von Γ über k und bezeichnet Sie mit $Rep \Gamma$.

Im folgenden werden ein paar Begrifflichkeiten bzgl. $Rep \Gamma$ gegeben:

Ein Objekt (V, f) heißt **Unterobjekt** eines Objektes (V', f') aus $Rep \Gamma$ wenn $V(i) \subset V'(i) \forall i \in \Gamma_0$ und $f_\alpha = f'_\alpha|_{V(i)}$ für jeden Pfeil $\alpha : i \rightarrow j$.

Für einen Morphismus $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ sei der **Kern** $Ker h$ das Unterobjekt (W, f'') von (V, f) definiert als $W(i) = ker h_i$ für $i \in \Gamma_0$ und $f''_\alpha = f_\alpha|_{W(i)}$ Einschränkung von f_α auf $W(i)$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$. Hierbei wird benutzt, dass $f_\alpha(ker h_i) \subset ker h_j$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$.

Desweiteren soll das **Bild** $Im h$ von h das Unterobjekt (U, g) von (V', f') sein, dass durch $U(i) = Im h_i$ und $g_\alpha = f'_\alpha|_{Im h_i}$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$ definiert ist. Das Objekt (V, f) mit $V(i) = 0$ für alle $i \in \Gamma_0$ und $f_\alpha = 0 \forall \alpha \in \Gamma_1$ ist das

Nullobjekt in $Rep \Gamma$.

Es folgt sofort:

Ein Morphismus $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ ist ein **Monomorphismus** in $Rep \Gamma$ gdw. $ker h = 0$ und h ein **Epimorphismus** ist gdw. $Im h = (V', f')$. Zudem ist h ein **Isomorphismus** gdw. $h_i : V(i) \rightarrow V'(i)$ ein Isomorphismus für alle $i \in \Gamma_0$ ist.

Eine Folge von Morphismen heißt **exakt**, wenn für $(V, f) \xrightarrow{g} (V', f') \xrightarrow{h} (V'', f'')$ gilt $Im(g) = ker(h)$. Dies ist der Fall gdw. die Folgen $V(i) \xrightarrow{g_i} V'(i) \xrightarrow{h_i} V''(i)$ exakt sind für alle $i \in \Gamma_0$.

Die **Summe von zwei Objekten** (V, f) und (V', f') aus $Rep \Gamma$ ist das Objekt (W, g) mit $W(i) = V(i) \oplus V'(i)$ für $i \in \Gamma_0$ und $g_\alpha = f_\alpha \oplus f'_\alpha \forall \alpha \in \Gamma_1$.

Eine Darstellung (V, f) heißt **unzerlegbar** gdw. es nicht isomorph zu einer Summe von zwei von Null verschiedenen Darstellungen ist.

Ein Objekt heißt **einfach**, wenn es keine echten von Null verschiedenen Unterobjekte besitzt.

Offenbar ist ein einfaches Objekt unzerlegbar.

Nun wollen wir zeigen, dass die beiden Kategorien $Rep \Gamma$ und $f.d.(k\Gamma)$ äquivalent sind.

Dazu definieren wir uns zunächst **Funktoren** $F : Rep \Gamma \rightarrow f.d.(k\Gamma)$ und $H : f.d.(k\Gamma) \rightarrow Rep \Gamma$.

Wir beginnen mit dem Funktor F :

Für (V, f) aus $Rep \Gamma$ definieren wir $F(V, f)$ mit $\bigoplus_{i \in \Gamma_0} V(i)$ als K -Vektorraum. Für jeden Pfeil $\alpha : i \rightarrow j$ erhalten wir eine K -lineare Abbildung $f_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$.

Sei $\pi_i : F(V, f) \rightarrow V(i)$ die Projektion und $\xi_i : V(i) \rightarrow F(V, f)$ die Einbettung. Somit ergibt sich die Abbildung $\bar{f}_\alpha = \xi_j f_\alpha \pi_i : F(V, f) \rightarrow F(V, f)$ mit

$$\begin{array}{ccc} F(V, f) & \xrightarrow{\bar{f}_\alpha} & F(V, f) \\ \downarrow \pi_i & & \uparrow \xi_j \\ V(i) & \xrightarrow{f_\alpha} & V(j) \end{array}$$

Für den trivialen Weg ϵ_i erhalten wir die Abbildung $\bar{f}_{\epsilon_i} = \xi_i f_{\epsilon_i} \pi_i : F(V, f) \rightarrow F(V, f)$ mit $f_{\epsilon_i} = 1_{V(i)} : V(i) \rightarrow V(i)$ und ebenso für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$. Durch Fortsetzen ist $F(V, f)$ ein $k\Gamma$ -Modul. Nun wäre noch nachzurechnen, dass diese Definition auch mit Verknüpfungen, Vielfachen,... gut geht. Dies lässt sich allerdings leicht nachrechnen und wir verzichten deswegen darauf an dieser Stelle.

Sei $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ ein Morphismus in $Rep \Gamma$. Wir erhalten eine K -lineare Abbildung $h_i : V(i) \rightarrow V'(i)$ für jedes $i \in \Gamma_0$, und somit gibt es die induzierte Abbildung von Vektorräumen $\tilde{h} : F(V, f) \rightarrow F(V', f')$. Für jede gerichtete Kante

$\alpha : i \rightarrow j$ aus Γ_1 haben wir die Abbildung $h_j f_\alpha = f'_\alpha h_i : V(i) \rightarrow V'(j)$

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{h_i} & V'(i) \\ \downarrow f_\alpha & & \downarrow f'_\alpha \\ V(j) & \xrightarrow{h_j} & V'(j) \end{array}$$

und somit $\tilde{h} \bar{f}_\alpha = \bar{f}'_\alpha \tilde{h}$ so dass man $\tilde{h} \bar{f}_\sigma = \bar{f}'_\sigma \tilde{h}$ für jedes $\sigma \in k\Gamma$ erhält.

Mit anderen Worten ist $\tilde{h}(\sigma v) = \sigma \tilde{h}(v)$ für $v \in F(V, f)$. Also ist \tilde{h} eine $k\Gamma$ -Abbildung.

Definiere nun $F(h) = \tilde{h}$.

Es folgt sofort, dass F ein Funktor ist (Komposition und Einselement wären noch nachzurechnen. Auch dies ist aber eigentlich durch kurzes Nachdenken klar.)

Konstruktion des Funktors H :

Sei C ein Objekt in $f.d.(k\Gamma)$. Aus Korollar 2.3 ist bekannt, dass $1 = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n$ die Summe orthogonaler Idempotente von $k\Gamma$ ist. Wir erhalten somit die direkten Summen von K -Vektorräumen $C = \bigoplus_{i \in \Gamma_0} \epsilon_i C$. Für jedes $\sigma \in k\Gamma$ erhalten wir die Abbildung $\bar{f}_\sigma : C \rightarrow C$ durch $\bar{f}_\sigma \text{sigma}(c) = \sigma c$.

Ist $\alpha : i \rightarrow j$ eine gerichtete Kante in Γ so haben wir $\alpha(\epsilon_i c) = \epsilon_j \alpha c \subset \epsilon_j c$, s.d. α durch Einschränkung eine K -lineare Abbildung $f_\alpha : \epsilon_i C \rightarrow \epsilon_j C$ induziert.

Nun definieren wir $H(C)$ als Darstellung gegeben durch die K -Vektorräume $\epsilon_i C$ für $i \in \Gamma_0$ zusammen mit den Abbildungen $f_\alpha : \epsilon_i C \rightarrow \epsilon_j C$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$.

Sei $h : B \rightarrow C$ ein Morphismus in $f.d.(k\Gamma)$, wir haben $h(\epsilon_i B) \subset \epsilon_i h(B) \subset \epsilon_i C$ und erhalten somit durch Einschränkung die K -lineare Abbildung $h_i : \epsilon_i B \rightarrow \epsilon_i C$.

Für eine gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$ erhalten wir $\alpha h(b) = h(\alpha b)$ für $b \in B$ und damit $\alpha h_i(b) = h_j(\alpha b)$ für $b \in \epsilon_i B$. Mit anderen Worten haben wir $f'_\alpha h_i(c) = h_j f_\alpha(c)$. Sei somit $H(h) = \{h_i\}$ und erhalten $H(h) : H(B) \rightarrow H(C)$ als Abbildung in $Rep \Gamma$. Es ergibt sich sofort, dass H ein Funktor ist. Auch hier wären noch die Funktoreigenschaften nachzurechnen. Aber auch diese sind unmittelbar einsichtig.

Satz 3.1. *Sei K ein Körper und Γ ein endlicher Köcher. Dann sind die Funktoren $F : Rep \Gamma \rightarrow f.d.(k\Gamma)$ und $H : f.d.(k\Gamma) \rightarrow Rep \Gamma$ sind gegenseitige Äquivalenzen von K -Kategorien.*

Beweis. Sei (V, f) aus $Rep \Gamma$. Dann ist $F(V, f) = \bigoplus_{i \in \Gamma_0} V(i)$ und $\epsilon_i F(V, f) = \tilde{f}_{\epsilon_i}(F(V, f)) = \xi_i(V(i))$. Ist $\alpha : i \rightarrow j$ eine gerichtete Kante in Γ , die K -lineare Abbildung $f_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$ induziert die K -lineare Abbildung $f_\alpha : F(V, F) \rightarrow F(V, f)$. Die Einschränkung von f_α auf $\xi_i(V(i))$ liefert eine K -lineare Abbildung $f'_\alpha : \xi_i(V(i)) \rightarrow \xi_j(V(j))$.

Für jede gerichtete Kante $\alpha : i \rightarrow j$ haben wir das folgende kommutierende Dia-

gramm:

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{\xi_i} & \xi_i(V(i)) \\ \downarrow f_\alpha & & \downarrow f'_\alpha \\ V(j) & \xrightarrow{\xi_i} & \xi_i(V(j)) \end{array}$$

$HF(V, f)$ ist die Darstellung durch die Menge $\{\xi_i(V(i))\}$ gegeben, wir erhalten $\xi = \{\xi_i\}$ als Isomorphismus $\xi : (v, f) \rightarrow HF(V, f)$. Somit ist ξ ein Isomorphismus von Funktoren von $1_{Rep \Gamma}$ nach HF .

Seien nun B und C Objekte aus $f.d.(k\Gamma)$ und $f : B \rightarrow C$ eine $k\Gamma$ -Abbildung. Wir haben das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow \xi & & \downarrow \xi \\ \bigoplus_{i \in \Gamma_0} \epsilon_i B & \xrightarrow{f_1 \oplus \dots \oplus f_r} & \bigoplus_{i \in \Gamma_0} \epsilon_i C \end{array}$$

wobei $f_i : \epsilon_i B \rightarrow \epsilon_i C$ die eingeschränkten Abbildungen. Somit erhalten wir einen Isomorphismus von Funktoren von $1_{f.d.(k\Gamma)}$ nach FH . Insgesamt folgt die Behauptung. (siehe auch [ARS])

□

Konstruktion der unzerlegbaren projektiven Darstellungen:

Bereits konstruiert wurden die unzerlegbaren, projektiven Moduln. Diese sind gerade von der Form $(k\Gamma)\epsilon_i$.

Mit dem Satz von Krull-Remark-Schmidt (siehe [L] Kapitel 10) folgt, dass dies alle sind (bis auf Isomorphie).

Bereits gezeigt wurde die Äquivalenz der beiden Kategorien. Die Frage, die sich jetzt noch stellt ist:

Warum bleiben die Eigenschaften unzerlegbar und projektiv erhalten?

Dies ergibt sich aus folgendem Satz, den wir hier nicht beweisen werden:

Satz Seien \aleph und \aleph zwei Kategorien.

Ein Funktor $F : \aleph \rightarrow \aleph$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn er *voll*, *treu* und *dicht* ist.

(Zur Erinnerung:

voll: F operiert surjektiv auf den Morphismen

treu: F operiert injektiv auf den Morphismen

dicht: $\forall R \in \aleph \exists N \in \aleph$, sodass $[R] = [F(N)]$

(wobei unter $[R]$ bzw. $[F(N)]$ die Isomorphieklasse von R bzw. $F(N)$ zu verstehen ist.))

Hieraus folgt sofort, dass die Unzerlegbarkeit und die Projektivität erhalten bleiben.

4 Quellenverzeichnis

- [ARS] Auslander-Reiten-Smalø: Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press (1997)
- [ASS] Assem-Simson-Skowronski: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1: Techniques of Representation Theory. London Mathematical Society Student, 65. Cambridge University Press (2006)
- [B] Benson: Representations and Cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30. Cambridge University Press (1998)
- [BR] Brundan: Skript zur Vorlesung *Topics in Representation Theory 03/04 (University of Oregon)*
(erhältlich unter: www.uoregon.edu/~brundan/math607winter03/)
- [C] Crawley-Boevey: Lectures on Representations of Quivers
(erhältlich unter: www.mathematik.uni-bielefeld.de/birep/la3/)
- [L] Lang: Algebra, Third Edition. Addison-Wesley Publishing Company (1993)