**Seminar "Höhere Lineare Algebra"**
**Thema 9:**
**Darstellungen von Köchern sind Moduln über der Wege-Algebra**
**Konstruktion der unzerlegbaren projektiven Darstellungen**

Nancy Oschmann, Martina Schulz
SoSe 2006

# 1 Definitionen

**Definition 1.1.** Ein Köcher $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ ist ein orientierter Graph, (Kreise und Schleifen werden dabei nicht ausgeschlossen) mit $\Gamma_0$ die Menge der Knoten und $\Gamma_1$ die Menge der Kanten (Pfeile) zwischen jeweils zwei Knoten.

Im folgenden betrachten wir nur endliche Köcher d.h., die Mengen $\Gamma_0$ und $\Gamma_1$ sind endlich.

### Beispiele

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, shift left, "\alpha"'] & \circ \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift left, "\gamma"'] & \circ \arrow[l, shift left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, shift left, "\alpha"'] & \circ \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop above, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

**Definition 1.2.** Sei $\Gamma$ ein Köcher. Ein Weg der Länge $l \geq 1$ ist eine Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in \Gamma_1$ von gerichteten Kanten ausgehend vom Anfangspunkt $a$ zum Endpunkt $b$, wobei $a, b \in \Gamma_0$.

<u>Schreibweise:</u> $(a|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l|b)$

### Visualisiert

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

Der Weg der Länge $l = 0$ wird der triviale oder auch stationäre Weg $\epsilon_a$ genannt. Ein Weg der Länge $l \geq 1$ wird Kreis genannt, wenn der Startknoten gleich dem Endknoten ist. Ein Kreis der Länge 1 wird Schleife genannt.

### Beispiel

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

**Definition 1.3.** Sei $\Gamma$ ein Köcher, $K$ Körper.Die Wege-Algebra $k\Gamma$ von $\Gamma$ ist diejenige $k$- Algebra, die als Basis des zugrunde liegenden $k$-Vektorraums die Menge aller Wege $(a|\alpha_1 \dots \alpha_l|b)$ der Länge $l \geq 0$ in $\Gamma$ hat.

Das Produkt von zwei solchen Basiselementen $(a|\alpha_1 \dots \alpha_l|b)$ und $(c|\beta_1 \dots \beta_k|d)$ von $k\Gamma$ ist definiert durch:

$$(a|\alpha_1 \dots \alpha_l|b)(c|\beta_1 \dots \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1 \dots \alpha_l \beta_1 \dots \beta_k|d)$$

(wobei $\delta_{bc}$ das Kronecker-Symbol sein soll).

**Beispiele**

1. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

   Daraus ergibt sich als Basis für die Wege-Algebra:
   $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$

2. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

   Daraus ergibt sich als Basis für die Wege-Algebra:
   $\{\epsilon_1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, ...\}$
   (Es ist $(\alpha^i)(\alpha^j) = (\alpha^{i+j})$ für $i \geq 0$ und $j \geq 0$.
   $k\Gamma$ ist isomomorph zum Polynomring $K[X]$ in einer Variablen mit der Identifikation $\alpha^i \mapsto X^i$ für $i \geq 0$.)

3. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[dr, "\alpha"] & \\ 3 \arrow[r, "\beta"] & 1 \\ 4 \arrow[ur, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

   Als Basis für die Wege-Algebra ergibt sich somit:
   $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma\}$

4. Gegeben sei der folgende Köcher:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & 3 \arrow[d, "\delta"'] \\ 2 \arrow[r, "\gamma"'] & 4 \end{tikzcd}$$

   Es ergibt sich die folgende Basis für die Wege-Algebra:
   $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\gamma, \beta\delta\}$

**Definition 1.4.** Ein Idempotent $e \in A$ ($A$ eine Algebra) ist ein von Null verschiedenes Element mit $e^2 = e$. Zwei Idempotente $e_1, e_2 \in A$ heißen orthogonal, wenn $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Ein primitives Idempotent ist ein Idempotent, dass nicht als Summe von Orthogonalen Idempotenten geschrieben werden kann.

**Definition 1.5.** Ein Links-R-Modul über einem Ring $R$ besteht aus einer abelschen Gruppe $(M, +)$ und einer Multiplikation $R \times M \to M$, s.d. $\forall r, s \in R$ und $x, y \in M$ gilt:

(i) $r(x + y) = rx + ry$

(ii) $(r + s)x = rx + sx$

(iii) $(rs)x = r(sx)$

Für unitäre Moduln fordert man zusätzlich:

(iv) $1 \cdot x = x$

Ein Rechts-R-Modul ist analog defniert, nur mit $M \times R \to M$ als Multiplikation.

Ein Bimodul über den Ringen R und S ist ein Rechts- und Links-Modul mit: $r(ms) = (rm)s$ für $r \in R, s \in S, m \in M$.

**Definition 1.6.** Sei $M$ ein Links-R-Modul und $N \subseteq M$ Untergruppe. Dann ist $N$ ein Untermodul (oder genauer $R$-Untermodul) wenn für jedes $n \in N$ und jedes $r \in R$ $rn \in N$ gilt.

**Definition 1.7.** Seien $M, N$ Links-R-Moduln. $f : M \to N$ ist ein Homomorphismus von $R$-Moduln, wenn gilt: $\forall m, n \in M, \ \forall rs \in R$

$$f(rm + sn) = rf(m) + sf(n).$$

Ein bijektiver Modul-Homomorphismus ist ein **Isomorphismus** von Moduln. Zwei Moduln werden isomorph genannt, wenn zwischen ihnen ein Modul-Isomorphismus existiert.

De **Kern** eines Modul-Homomorphismus $f : M \to N$ ist der Untermodul von $M$, welcher aus allen Elementen besteht, die durch $f$ auf 0 geschickt werden.
Also:
$Kerf = \{m \in M | f(m) = 0\}$

Das **Bild** eines Modul-Homomorphismus $f : M \to N$ ist der Untermodul von $N$, welcher aus allen Elementen besteht, die durch $f$ abgebildet worden sind.
Also:
$Imf = \{n \in N | \exists m \in M : f(m) = n\}$

**Definition 1.8.** Ein Modul $M$ ist endlich erzeugt, wenn endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in M$ existieren, sodass alle $m \in M$ als Linearkombination dieser Elemente dargestellt werden kann.

**Definition 1.9.** Ein freier Modul ist ein Modul, der eine Basis besitzt.
Mit anderen Worten:
Ein freier Modul ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien vom Ring $R$.
(Diese Moduln sind in ihren Eigenschaften sehr ähnlich zu Vektorräumen.)

*Im folgenden werden Epimorphismen mit einem Pfeil der Form $\twoheadrightarrow$ kenntlich gemacht.*

**Definition 1.10.** Ein $R$-Modul $P$ heißt projektiv, falls für jeden Epimorphismus $h : M \to N$ und jedes $f \in Hom_R(P, N)$ ein $f' \in Hom_R(P, M)$ existiert, s.d. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\exists f'"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ M \arrow[r, two heads, "h"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

**Nicht jeder Modul ist projektiv.**
Ein Gegenbeispiel dafür ist der Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$.
Es existiert keine Abbildung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$, sd. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[d, "\nexists f'"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ \mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "h"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

**Definition 1.11.** Ein unzerlegbarer Modul ist ein von Null verschiedener Modul, der nicht als direkte Summe zweier von Null verschiedener Moduln geschrieben werden kann.

**Definition 1.12.** Ein einfacher Modul ist ein Modul, der als einzige Untermoduln 0 und sich selbst hat.

**Definition 1.13.** Sei $R$ ein kommutativer Ring, $A$ eine assoziative $R$-Algebra, so ist ein $A$-Linksmodul ein $R$-Modul $M$ zusammen mit einem $R$-Modulhomomorphismus $A \otimes_R M \to M, a \otimes m \mapsto am$, s.d. $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$ für $a_1, a_2 \in A, m \in M$.
(Ist $R$ ein Körper, so ist das Tensorpordukt als *normale* Multiplikation zu verstehen.)

# 2 Vorbemerkungen

**Definition 2.1.** Sei $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Das Produkt der Moduln $M_i, i \in I$ ist wie folgt definiert:

$$\prod_{i\in I} M_i := \{f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i | f(i) \in M_i, \forall i \in I\},$$

wobei $\bigcup_{i\in I} M_i$ die disjunkte Vereinigung der $M_i$ ist.
Die $R$-Modulstruktur auf $\prod_{i\in I} M_i$ ist gegeben durch:

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) \in M_i,$$

$$(rf)(i) = rf(i) \in M_i.$$

Die Summe der Moduln $M_i, i \in I$ ist:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{f \in \prod_{i\in I} M_i | Tr\ddot{a}ger(f) < \infty\},$$

wobei $Tr\ddot{a}ger(f) = \{i \in I | f(i) \neq 0\}$ ist.
Die $R$-Modulstruktur auf $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ist gegeben durch:

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) \in M_i,$$

$$(rf)(i) = rf(i) \in M_i.$$

Ist $|I| < \infty$, so gilt: $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

**Universelle Eigenschaft**
Sei $\pi_i = \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_i$ die kanonische Projektion. Sei $N$ ein $R$-Modul und sei $\{f_i : N \to M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Modulhomomorphismen.
Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f : N \to \bigoplus_{i\in I} M_i$, s.d. $\forall i \in I$ gilt: $\pi_i \circ f = f_i$.

$$\begin{tikzcd}
 & & M_t \\
N \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[urr, bend left, "f_t"] \arrow[drr, bend right, "f_s"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_s"] & \\
 & & M_s
\end{tikzcd}$$

Sei $\iota_k : M_k \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ die kanonische Einbettung. Sei $N$ ein $R$-Modul und sei $\{g_i : M_i \to N\}_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Modulhomomorphismen.
Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $g : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$, s.d. $\forall k \in I$ gilt: $g \circ \iota_k = g_k$.

$$\begin{tikzcd} M_t \arrow[dr, "\iota_t"] \arrow[drr, bend left, "g_t"] & & \\ & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, dashed, "\exists! g"'] & N \\ M_s \arrow[ur, "\iota_s"'] \arrow[urr, bend right, "g_s"'] & & \end{tikzcd}$$

Dies nennt man die Universelle Eigenschaft.

**Proposition 2.1.** *Jeder freie Modul ist projektiv.*

*Beweis.* Wähle eine Basis für den freien Modul $F$. Diese sei $\{x_j | j \in J\}$. Setze $f'(x_j) := z_j$ für ein $z_j \in h^{-1}(f(x_j))$. (Dies existiert aufgrund der Surjektivität von h) Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\exists f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ N \arrow[r, two heads, "h"'] & M \end{tikzcd}$$

Es folgt die Behauptung.

□

**Proposition 2.2.** *Projektive Moduln sind direkte Summanden von freien Moduln.*

*Beweis.* Sei $F$ freier Modul, $P$ projektiver Modul.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "id_p"] \\ F \arrow[r, two heads, "h"] & P \end{tikzcd}$$

Es ist $id_P \in Hom(P, P)$, und $h$ sei Epimorphismus von $F$ nach $P$.
Es gibt nur ein $f' \in Hom(P, F)$ mit $h \circ f' = id_P$, da $P$ projektiv ist.
Demnach ist $Im(h) \oplus Kern(h) \simeq F$, (Isomorphiesatz für Moduln) und $Imh \simeq P$ (da h surjektiv).

□

**Proposition 2.3.** *Seien $P, Q$ R-Moduln. Es ist $P \oplus Q$ genau dann projektiv, wenn $P$ und $Q$ projektiv sind.*

*Beweis.* $\Leftarrow$: Seien $P$ und $Q$ projektiv. Dann existiert $f'_P : P \to M$, s.d. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\iota_P"] \arrow[ddl, "f'_P"'] \arrow[dd, bend left=60, "f_Q"] \\
 & P \oplus Q \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}$$

Analog gibt es $f'_Q : Q \to M$. Es gilt $h \circ f'_p = f_p \circ \iota_P$ und $f \circ f'_Q = f \circ \iota_Q$. Die Existenz von $f' : P \oplus Q \to M$ folgt aus der universellen Eigenschaft der direkten Summe.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "\iota_p"] \arrow[drrr, bend left, "f'_p"] & & & \\
 & P \oplus Q \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right=20, "f'"'] & N & M \arrow[l, two heads, "h"'] \\
Q \arrow[ur, "\iota_Q"'] \arrow[urrr, bend right, "f'_Q"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Es gilt: $(h \circ f') \circ \iota_P = hf'_P = f \circ \iota_p$ und $(h \circ f') \circ \iota_Q = hf'_Q = f \circ \iota_Q$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft der direkten Summe folgt: $h \circ f' = f$. Damit ist $P \oplus Q$ projektiv.

$\Rightarrow$: Sei $P \oplus Q$ projektiv. Benutze wieder die universelle Eigenschaft um $f : P \oplus Q \to N$ zu konstruieren.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "\iota_p"] \arrow[ddr, bend right=40, "f_p"'] & & Q \arrow[dl, "\iota_Q"'] \arrow[ddl, bend left=40, "f_Q"] \\
 & P \oplus Q \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, two heads, "h"'] & N &
\end{tikzcd}$$

Es gilt $f \circ \iota_p = f_P, f \circ \iota_Q = f_Q$.
$P \oplus Q$ ist projektiv, also gibt es $f' : P \oplus Q \to M$ mit $h \circ f' = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\iota_P"] \arrow[dd, bend left=60, "f_p"] \\
 & P \oplus Q \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "f'"'] \\
M \arrow[r, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}$$

Es ist $h \circ (f' \circ \iota_p) = f \circ \iota_P = f_P$. Also ist $f' \circ \iota_P : P \to M$ der gesuchte Homomorphismus und $P$ projektiv.

Es ist $h \circ (f' \circ \iota_Q) = f \circ \iota_Q = f_Q \Rightarrow Q$ projektiv.
(Völlig analog zeigt man, dass Q projektiv ist.) $\square$

**Proposition 2.4.** *Sei $A$ eine endlich dimensionale Algebra und $e \neq 0$ ein Idempotent in $A$.*

*(a) Sei $Ae = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ freier Modul mit $P_i \neq 0$ und $e_i \in P_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, s.d. $e = e_1 + \cdots + e_n$. Dann ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Menge von Null verschiedener orthogonaler Idempotente mit der Eigenschaft $Ae_i = P_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.*

*(b) Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Menge von Null verschiedener orthogonaler Idempotente, s.d. $e = e_1 + \cdots + e_n$. Dann ist $Ae_i$ ein Untermodul von $Ae$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $Ae = Ae_1 + \ldots Ae_n$.*

*(c) $e \in A$ ist ein prmitives Idempotent gdw. $Ae$ ein unzerlegbarer projektiver Modul ist.*

*(d) Das Einselement kann als Summe von primitiven orthogonalen Idempotenten geschrieben werden.*

*Beweis.* $(a)$ Nach Voraussetzung ist $e \in A$, und es gibt eindeutige Elemente mit $e_i \in P_i,\ i = 1, \ldots, n$, $e = e_1 + \cdots + e_n$.
Sei $x \in Ae \Rightarrow x = \lambda e$ mit $\lambda \in A$, also $xe = (\lambda e)e = \lambda e = x$. Sei $x_i \in P_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $x_i = x_i e_1 + \cdots + x_i e_n$.
Da $x_i e_j \in P_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$ existiert nur eine Möglichkeit $x_i$ als Summe der Elemente von $P_j$ darzustellen. Es folgt $x_i e_j = 0$ für $i \neq j$ und $x_j e_j = x_j$. Es ist $P_i = Ae_i$, also $e_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, da alle $P_i \neq 0$ nach Voraussetzung.
Insbesondere ist $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ und $e_i^2 = e_i$. Somit ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Menge von Null verschiedener orthogonaler Idempotente.

$(b)$ Es ist $e_i e = e_i e_1 + \cdots + e_i e_n = e_i^2 = e_i$, da $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ nach Voraussetzung.
Es ist $e_i \in Ae_i$ und somit also $Ae_i \subset Ae$. Wir wollen zeigen, dass sich jedes $x \in Ae$ eindeutig als Summe $x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in Ae_i$ für $i = 1, \ldots, n$ darstellen lässt.
Jedes Element in $Ae_i$ kann so dargestellt werden, also ist nur zu zeigen, dass die Darstellung eindeutig ist, oder - was äquivalent dazu ist – dass $0 = x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in Ae_i$. Dann ist $x_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.
Sei $0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ mit $\lambda_i \in Ae_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $0 = \lambda_1 e_1 e_i + \cdots + \lambda_n e_n e_i$. Da $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ folgt $0 = \lambda_i e_i^2 = \lambda_i e_i = x_i$, was zu zeigen war.

$(c)$ Folgt sofort aus $(a)$ und $(b)$ und Proposition 2.3.

$(d)$ Folgt direkt aus $(a)$ und $(b)$.

$\square$

**Lemma 2.1.** *Sei $\Gamma$ ein Köcher und $k\Gamma$ die dazugehörige Wege-Algebra. Dann gilt:*

*(a) $k\Gamma$ ist eine assoziative Algebra.*

*(b) $k\Gamma$ hat ein Einselement gdw. $\Gamma_0$ endlich ist.*

*(c) $k\Gamma$ ist endlich dimensional gdw $\Gamma$ endlich ist und keine Kreise besitzt.*

*Beweis.* $(a)$ Da das Produkt von Basiselementen die Hintereinanderschaltung von Wegen ist, folgt die Behauptung sofort.

$(b)$ Es ist klar, dass der Weg der Länge Null $\epsilon_a$ ein Idempotent von $k\Gamma$ ist. Da $\Gamma_0$ endlich ist, ist $\sum_{a\in\Gamma_0} \epsilon_a$ das Einselement von $k\Gamma$.
Angenommen, $\Gamma_0$ ist nicht endlich. Sei $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i = 1$ das Einselement von $k\Gamma$ (mit $\lambda_i \neq 0\ \forall i$ und $w_i$ Wege in $\Gamma$). Die Menge $\Gamma_0'$ aller Anfangsknoten von $w_i$ hat demnach $m$ Elemente und ist demnach endlich.
Ist $a \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_0' \Rightarrow \epsilon_a \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Widerspruch.

$(c)$ Ist $\Gamma$ nicht endlich, so ist auch die Basis von $k\Gamma$ nicht endlich, also ist $k\Gamma$ nicht endlich dimensional.
Ist $w = \alpha_1 \dots \alpha_l$ ein Kreis in $\Gamma$, so ist $w^t = (\alpha_1 \dots \alpha_l)^t$ für alle $t \geq 0$ ein Basiselement von $k\Gamma$ und demnach is $k\Gamma$ unendlich dimensional.
Ist $\Gamma$ endlich und besitzt keine Kreise, so enthält $\Gamma$ nur endlich viele Wege und somit ist $k\Gamma$ endlich dimensional.

□

**Korollar 2.1.** *Sei $\Gamma$ ein endlicher Köcher. Dann ist $1 = \sum_{a\in\Gamma_0} \epsilon_a$ das Einselement von $k\Gamma$ und die Menge $\{\epsilon_a | a \in \Gamma_0\}$ aller trivialen Wege ist eine vollständige Menge von primitiven orthogonalen Idempotente in $k\Gamma$.*

*Beweis.* Nach Definition der Multiplikation sind die trivialen Wege $\epsilon_a$ orthogonale Idempotente in $k\Gamma$.
Da $\Gamma_0$ endlich ist, ist $1 = \sum_{a\in\Gamma_0} \epsilon_a$ das Einselement von $k\Gamma$. Also ist zu zeigen, dass die $\epsilon_a$ primitiv sind oder, dass die einzgen Idempotente der Algebra $\epsilon_a(k\Gamma)\epsilon_a$ 0 und $\epsilon_a$ sind.
Jedes Idempotent $\epsilon$ kann in der folgenden Form geschrieben werden: $\epsilon = \lambda\epsilon_a + w,\ \lambda \in K,\ w$ Linearkombination von Kreisen durch $a$ der Länge $\geq 1$.
$0 = \epsilon^2 - \epsilon = (\lambda^2 - \lambda)\epsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2$ ergibt sich mit $w = 0$ $\lambda^2 = \lambda$, also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1 \ \Rightarrow \epsilon = 0$ oder $\epsilon = \epsilon_a$.

□

# 3 Äquivalenz der Kategorien $Rep\ \Gamma$ und $f.d.(k\Gamma)$

*(Siehe dazu [ARS] Kapitel 3.)*

Im Folgenden soll $f.d.(k\Gamma)$ für die Kategorie der endlich dimensionalen Moduln über $k\Gamma$ stehen.

**Definition 3.1.** Eine Darstellung $(V, f)$ eines Köchers $\Gamma$ über einem Körper $K$ ist eine Menge von Vektorräumen $\{V(i)|i \in \Gamma_0\}$ zusammen mit $k$-linearen Abbildungen $f_\alpha : V(i) \to V(j)$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$.

Im Folgenden betrachten wir nur endlich-dimensionale Darstellungen, d.h. jeder Vektrraum $V(i)$ hat endliche Dimension über $K$.

Sei $h : (V, f) \to (V', f')$ ein **Morphismus** zwischen zwei Darstellungen von $\Gamma$ über $K$ ist eine Menge $\{h_i : V(i) \to V'(i)\}_{i\in\Gamma_0}$ von $k$-linearen Abbildungen, s.d. für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$ in $\Gamma$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & V'(i) \arrow[d, "f'_\alpha"] \\ V(j) \arrow[r, "h_j"'] & V'(j) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Sind $h : (V, f) \to (V', f')$ und $g : (V', f') \to (V'', f'')$ Morphismen zwischen Darstellungen, dann ist die **Komposition** $gh$ definiert als die Menge der Abbildungen $\{g_ih_i|V(i) \to V''(i)\}_{i\in\Gamma_0}$.
Man erhält der Kategorie der (endlich-dimensionalen) Darstellungen von $\Gamma$ über $k$ und bezeichnet Sie mit $Rep\ \Gamma$.

Im folgenden werden ein paar Begrifflichkeiten bzgl. $Rep\ \Gamma$ gegeben:

Ein Objekt $(V, f)$ heißt **Unterobjekt** eines Objektes $(V', f')$ aus $Rep\ \Gamma$ wenn $V(i) \subset V'(i)\ \forall i \in \Gamma_0$ und $f_\alpha = f'_\alpha|_{V(i)}$ für jeden Pfeil $\alpha : i \to j$.

Für einen Morphismus $h : V(i) \to (V', f')$ sei der **Kern** $Ker\ h$ das Unterobjekt $(W, f'')$ von $(V, f)$ definiert als $W(i) = ker\ h_i$ für $i \in \Gamma_0$ und $f''_\alpha = f_\alpha|_{W(i)}$ Einschränkung von $f_\alpha$ auf $W(i)$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$. Hierbei wird benutzt, dass $f_\alpha(ker\ h_i) \subset ker\ h_j$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$.

Desweiteren soll das **Bild** $Im\ h$ von $h$ das Unterobjekt $(U, g)$ von $(V', f')$ sein, dass durch $U(i) = Im\ h_i$ und $g_\alpha = f'_\alpha|_{Im\ h_i}$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$ definiert ist. Das Objekt $(V, f)$ mit $V(i) = 0$ für alle $i \in \Gamma_0$ und $f_\alpha = 0\ \forall\alpha \in \Gamma_1$ ist das

**Nullobjekt** in *Rep* $\Gamma$.

**Es folgt sofort:**
Ein Morphismus $h : (V, f) \to (V', f')$ ist ein **Monomorphismus** in *Rep* $\Gamma$ gdw. $ker\ h = 0$ und $h$ ein **Epimorphismus** ist gdw. $Im\ h = (V', f')$. Zudem ist $h$ ein **Isomorphismus** gdw. $h_i : V(i) \to V'(i)$ ein Isomorphismus für alle $i \in \Gamma_0$ ist.

Eine Folge von Morphismen heißt **exakt**, wenn für $(V, f) \xrightarrow{g} (V', f') \xrightarrow{h} (V'', f'')$ gilt $Im(g) = ker(h)$. Dies ist der Fall gwd. die Folgen $V(i) \xrightarrow{g_i} V'(i) \xrightarrow{h_i} V''(i)$ exakt sind für alle $i \in \Gamma_0$.

Die **Summe von zwei Objekten** $(V, f)$ und $(V', f')$ aus *Rep* $\Gamma$ ist das Objekt $(W, g)$ mit $W(i) = V(i) \oplus V'(i)$ für $i \in \Gamma_0$ und $g_\alpha = f_\alpha \oplus f'_\alpha\ \forall \alpha \in \Gamma_1$.

Eine Darstellung $(V, f)$ heißt **unzerlegbar** gdw. es nicht isomorph zu einer Summe von zwei von Null verschiedenen Darstellungen ist.

Ein Objekt heißt **einfach**, wenn es keine echten von Null verschiedenen Unterobjekte besitzt.
Offenbar ist ein einfaches Objekt unzerlegbar.

Nun wollen wir zeigen, dass die beiden Kategorien *Rep* $\Gamma$ und $f.d.(k\Gamma)$ äquivalent sind.
Dazu definieren wir uns zunächst **Funktoren** $F : Rep\ \Gamma \to f.d.(k\Gamma)$ und $H : f.d.(k\Gamma) \to Rep\ \Gamma$.
**Wir beginnen mit dem Funktor $F$:**

Für $(V, f)$ aus *Rep* $\Gamma$ definieren wir $F(V, f)$ mit $\bigoplus_{i \in \Gamma_0} V(i)$ als $K$- Vektorraum. Für jeden Pfeil $\alpha : i \to j$ erhalten wir eine $K$-lineare Abbildung $f_\alpha : V(i) \to V(j)$.
Sei $\pi_i : F(V, F) \to V(i)$ die Projektion und $\xi_i : V(i) \to F(V, f)$ die Einbettung. Somit ergibt sich die Abbildung $\bar{f}_\alpha = \xi_i f_\alpha \pi_i : F(V, f) \to F(V, f)$ mit

$$\begin{tikzcd} F(V,f) \arrow[r, "\bar{f}_\alpha"] \arrow[d, "\pi_i"] & F(V,f) \\ V(i) \arrow[r, "f_\alpha"] & V(j) \arrow[u, "\xi_i"'] \end{tikzcd}$$

Für den trivialen Weg $\epsilon_i$ erhalten wir die Abbildung $\bar{f}_{\epsilon_i} = \xi_i f_{\epsilon_i} \pi_i : F(V, f) \to F(V, f)$ mit $f_{\epsilon_i} = 1_{V(i)} : V(i) \to V(i)$ und ebenso für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$. Durch Fortsetzen ist $F(V, f)$ ein $k\Gamma$-Modul. Nun wäre noch nachzurechnen, dass diese Definition auch mit Verknüpfungen, Vielfachen,... gut geht. Dies lässt sich allerdings leicht nachrechnen und wir verzichten deswegen darauf an dieser Stelle.
Sei $h : (V, f) \to (V', f')$ ein Morphismus in *Rep* $\Gamma$. Wir erhalten eine $K$-lineare Abbildung $h_i : V(i) \to V'(i)$ für jedes $i \in \Gamma_0$, und somit gibt es die induzierte Abbildung von Vektorräumen $\tilde{h} : F(V, f) \to F(V', f')$. Für jede gerichtete Kante

$\alpha : i \to j$ aus $\Gamma_1$ haben wir die Abbildung $h_j f_\alpha = f'_\alpha h_i : V(i) \to V'(j)$

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "f_\alpha"] & V'(i) \arrow[d, "f'_\alpha"] \\ V(j) \arrow[r, "h_j"'] & V'(j) \end{tikzcd}$$

und somit $\tilde{h}\bar{f}_\alpha = \bar{f}'_\alpha \tilde{h}$ so dass man $\tilde{h}\bar{f}_\sigma = \bar{f}'_\sigma \tilde{h}$ für jedes $\sigma \in k\Gamma$ erhält.
Mit anderen Worten ist $\tilde{h}(\sigma v) = \sigma\tilde{h}(v)$ für $v \in F(V, f)$. Also ist $\tilde{h}$ eine $k\Gamma$-Abbildung.
Definiere nun $F(h) = \tilde{h}$.
Es folgt sofort, dass $F$ ein Funktor ist (Komposition und Einselement wären noch nachzurechnen. Auch dies ist aber eigentlich durch kurzes Nachdenken klar.)

**Konstruktion des Funktors $H$:**
Sei $C$ ein Objekt in $f.d.(k\Gamma)$. Aus Korollar 2.3 ist bekannt, dass $1 = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n$ die Summe orthogonaler Idempotente von $k\Gamma$ ist. Wir erhalten somit die direkten Summen von $K$-Vektorräumen $C = \bigoplus_{i\in\Gamma_0} \epsilon_i C$. Für jedes $\sigma \in k\Gamma$ erhalten wir die Abbildung $\bar{f}_\sigma : C \to C$ durch $\bar{f}\_sigma(c) = \sigma c$.
Ist $\alpha : i \to j$ eine gerichtete Kante in $\Gamma$ so haben wir $\alpha(\epsilon_i c) = \epsilon_j \alpha c \subset \epsilon_j c$, s.d. $\alpha$ durch Einschränkung eine $K$-lineare Abbildung $f_\alpha : \epsilon_i C \to \epsilon_j C$ induziert.
Nun definieren wir $H(C)$ als Darstellung gegeben durch die $K$-Vektorräume $\epsilon_i C$ für $i \in \Gamma_0$ zusammen mit den Abbildungen $f_\alpha : \epsilon_i C \to \epsilon_j C$ für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$.

Sei $h : B \to C$ ein Morphismus in $f.d.(k\Gamma)$, wir haben $h(\epsilon_i B) \subset \epsilon_i h(B) \subset \epsilon_i C$ und erhalten somit durch Einschränkung die $K$-lineare Abbildung $h_i : \epsilon_i B \to \epsilon_i C$.
Für eine gerichtete Kante $\alpha : i \to j$ erhalten wir $\alpha h(b) = h(\alpha b)$ für $b \in B$ und damit $\alpha h_i(b) = h_i(\alpha b)$ für $b \in \epsilon_i B$. Mit anderen Worten haben wir $f'_\alpha h_i(c) = h_i f_\alpha(c)$. Sei somit $H(h) = \{h_i\}$ und erhalten $H(h) : H(B) \to H(C)$ als Abbildung in *Rep* $\Gamma$. Es ergibt sich sofort, dass $H$ ein Funktor ist. Auch hier wären noch die Funktoreigenschaften nachzurechnen. Aber auch diese sind unmittelbar einsichtig.

**Satz 3.1.** *Sei $K$ ein Körper und $\Gamma$ ein endlicher Köcher. Dann sind die Funktoren $F$ : Rep $\Gamma \to f.d.(k\Gamma)$ und $H : f.d.(k\Gamma) \to$ Rep $\Gamma$ sind gegenseitige Äquivalenzen von $K$-Kategorien.*

*Beweis.* Sei $(V, f)$ aus *Rep* $\Gamma$. Dann ist $F(V, f) = \bigoplus_{i\in\Gamma_0} V(i)$ und $\epsilon_i F(V, f) = \tilde{f}_{\epsilon_i}(F(V, f)) = \xi_i(V(i))$. Ist $\alpha : i \to j$ eine gerichtete Kante in $\Gamma$, die $K$-lineare Abbildung $f_\alpha : V(i) \to V(j)$ induziert die $K$-lineare Abbildung $f_\alpha : F(V, F) \to F(V, f)$. Die Einschränkung von $f_\alpha$ auf $\xi_i(V(i))$ liefert eine $K$-lineare Abbildung $f'_\alpha : \xi_i(V(i)) \to \xi_j(V(j))$.
Für jede gerichtete Kante $\alpha : i \to j$ haben wir das folgende kommutierende Dia-

gramm:

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "\xi_i"] \arrow[d, "f_\alpha"] & \xi_i(V(i)) \arrow[d, "f'_\alpha"] \\ V(j) \arrow[r, "\xi_i"] & \xi_i(V(j)) \end{tikzcd}$$

$HF(V,f)$ ist die Darstellung durch die Menge $\{\xi_i(V(i))\}$ gegeben, wir erhalten $\xi = \{\xi_i\}$ als Isomorphismus $\xi : (v,f) \to HF(V,f)$. Somit ist $\xi$ ein Isomorphismus von Funktoren von $1_{Rep\ \Gamma}$ nach $HF$.

Seien nun $B$ und $C$ Objekte aus $f.d.(k\Gamma)$ und $f : B \to C$ eine $k\Gamma$-Abbildung.
Wir haben das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"] & C \arrow[d, "\xi"] \\ \bigoplus_{i\in\Gamma_0} \epsilon_i B \arrow[r, "f_1\oplus\cdots\oplus f_n"] & \bigoplus_{i\in\Gamma_0} \epsilon_i C \end{tikzcd}$$

wobei $f_i : \epsilon_i B \to \epsilon_i C$ die eingeschränkten Abbildungen. Somit erhalten wir einen Isomorphismus von Funktoren von $1_{f.d.(k\Gamma)}$ nach $FH$.
Insgesamt folgt die Behauptung.(siehe auch [ARS])

□

**Konstruktion der unzerlegbaren projektiven Darstellungen:**

Bereits konstruiert wurden die unzerlegbaren, projektiven Moduln. Diese sind gerade von der Form $(k\Gamma)\epsilon_i$.
Mit dem Satz von Krull-Remark-Schmidt (siehe [L] Kapitel 10) folgt, dass dies alle sind (bis auf Isomorphie).

Bereits gezeigt wurde die Äquivalenz der beiden Kategorien. Die Frage, die sich jetzt noch stellt ist:
Warum bleiben die Eigenschaften unzerlegbar und projektiv erhalten?
Dies ergibt sich aus folgendem Satz, den wir hier nicht beweisen werden:

**Satz** Seien $\aleph$ und $\Re$ zwei Kategorien.
Ein Funktor $F : \aleph \to \Re$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn er *voll*, *treu* und *dicht* ist.
(Zur Erinnerung:
*voll*: $F$ operiert surjektiv auf den Morphismen
*treu*: $F$ operiert injektiv auf den Morphismen
*dicht*: $\forall R \in \Re\ \exists N \in \aleph$, sodass $[R] = [F(N)]$
(wobei unter $[R]$ bzw. $[F(N)]$ die Isomorphieklasse von $R$ bzw. $F(N)$ zu verstehn ist.))

Hieraus folgt sofort, dass die Unzerlegbarkeit und die Projektivität erhalten bleiben.

# 4 Quellenverzeichnis

[ARS ]Auslander-Reiten-Smalø: Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press (1997)

[ASS ]Assem-Simson-Skowronski: Elements of the Representation Theory of Associatice Algebras, Volume 1: Techniques of Representation Theory. London Mathematical Society Student, 65. Cambridge University Press (2006)

[B ]Benson: Representations and Cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30. Cambridge University Press (1998)

[BR ]Brundan: Skript zur Vorlesung *Topics in Representation Theory 03/04 (University of Oregon)*
(erhältlich unter: www.uoregon.edu/ brundan/math607winter03/)

[C ]Crawley-Boevey: Lectures on Representations of Quivers
(erhältlich unter: www.mathematik.uni-bielefeld.de/birep/la3/)

[L ]Lang: Algebra, Third Edition. Addison-Wesley Publishing Company (1993)