Seminar “Höhere Lineare Algebra“
Thema 6:
Der Satz von Weyl

Martina Schulz, Alexandra Bartsch
SoSe 2006

1 Hermann Weyl

Kurze Bibliographie

Hermann Weyl (geboren am 9.November 1885 in Elmshorn; gestorben am 8. Dezember 1955 in Zürich) war ein deutscher Mathematiker.
Von 1904 bis 1908 studierte er in Göttingen und München Mathematik und Physik. 1908 promovierte er mit einer Dissertation über singuläre Differentialgleichungen. 1910 habilitierte er sich als Privatdozent, von 1913-1930 bekleidete er den Lehrstuhl der Geometrie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, wo er Albert Einstein kennenlernte; 1928-1929 war er Gastprofessor an der Universität in Princton. 1930 wurde er in Göttingen Hilberts Nachfolger. 1933 ging er nach Amerika, wo er bis 1951 blieb. Seine letzten Lebensjahre verbrachte er in Zürich.
Hermann Weyl hat beinahe auf allen Gebieten der Mathematik hervorragende Leistungen erbracht, so in der Funktionentheorie, der Algebra, der Differentialgeometrie, der Analysis, der Zahlentheorie. Er interessierte sich zudem für die Verbindung der Mathematik zur Physik und der Philosophie.

Auswahl von Publikationen

Weyl, Hermann: Die Idee der Riemannschen Fläche. B.G.Teubner, Leipzig, 1913.
Weyl, Hermann: Das Kontinuum. Veit&Co., Leipzig, 1918.
Weyl, Hermann: Raum, Zeit, Materie. J.Springer, Berlin, 1918.
Weyl, Hermann: Kommentar zu Riemanns “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“. J.Springer, Berlin, 1919.
Weyl, Hermann: Mathematische Analyse des Raumproblems. J.Springer, Berlin, 1923.
Weyl, Hermann: Was ist Materie? J.Springer, Berlin, 1924.
Weyl, Hermann: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. R.Oldenburg, München, 1926
Weyl, Hermann: Gruppentheorie und Quantenmechanik. S.Hirzel, Leipzig, 1928.

2 Einige Definitionen

Satz von Weyl
Jede endlich dimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach.

Definition
Eine *Darstellung* einer Lie-Algebra L ist ein Paar (V,φ) bestehend aus einem Vektorraum V und einem Homomorphismus $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$ von Lie-Algebren.

Bemerkung 2.1
Sei L eine Lie-Algebra über k. Eine Linearform $\lambda \in L^*$ ist eine Darstellung von L genau dann, wenn λ auf dem von allen Kommutatoren erzeugten Untervektorraum $[L, L] \subset L$ verschwindet.
Wir haben also eine Bijektion:
$(L/[L, L])^* \longleftrightarrow ein{-}dimensionale\, Darstellungen\, von\, L,\ bis\, auf\, Isomorphie$

Definition
Eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ zwischen zwei Darstellungen einer Lie-Algebra L heißt *Homomorphismus von Darstellungen*, wenn gilt $\varphi(x.v) = x.\varphi(v)\ \forall\ v \in V, x \in L$.

Definition
Ein Untervektorraum U einer Darstellung V von L heißt *Unterdarstellung* genau dann, wenn $x.u \in U\ \forall\ u \in U, x \in L$.

Beispiel 2.2
Ist $\varphi : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so sind $Ker(\varphi)$ und $Im(\varphi)$ Unterdarstellungen.

Definition
Eine Darstellung V einer Lie-Algebra L heißt *einfach* oder *irreduzibel* genau dann, wenn ganz V oder 0 die einzigen Unterdarstellungen von V sind und V $\neq$ 0 gilt.

Definition
Eine Darstellung V heißt *halbeinfach* genau dann, wenn V direkte Summe einfacher Unterdarstellungen ist

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

mit V_i einfach.

3 Bemerkung zu halbeinfachen Darstellungen

Bemerkung 3.1
Genau wie bei Moduln kann man zeigen, dass für Darstellungen V äquivalent sind:

(i) V ist halbeinfach

(ii) V ist (nicht notwendigerweise direkte) Summe von einfachen Unterdarstellungen

(iii) jede Unterdarstellung von V besitzt ein Komplement

Dazu der folgende Satz:

Satz 3.2
Ist V halbeinfach, so besitzt jede Unterdarstellung U ein Komplement W, d.h. es gibt eine Unterdarstellung $W \subset V$ mit

$$U \oplus W = V$$

Das Lemma von Zorn (3.3) (ohne Beweis)
Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.

Beweis von 3.2
Sei V direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen, also $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ mit V_i einfach.
Setze nun für jede Untermenge $J \subset I$: $V_J = \bigoplus_{i \in J} V_i$.
Betrachte die Menge

$$M = \{J \subseteq I | V_J \cap U = 0\}$$

Diese ist durch Inklusionen induktiv geordnet und besitzt nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element J.
Wir zeigen, dass dann gilt:

$$V = U \oplus V_J$$

Angenommen $U \oplus V_J \subsetneq V$
$\Rightarrow \exists i \in I$ mit $V_i \not\subseteq U \oplus V_J$
Also $V_i \cap (U \oplus V_J) = 0$, da ja V_i nach Vorraussetzung einfache Darstellung.
Somit ist dann aber auch $(V_i \oplus V_J) \cap U = 0$ und V_J ist daher nicht maximal.
WIDERSPRUCH

$\square$

4 Vorbereitungen zum Beweis

Erinnerung
Eine Lie-Algebra heißt halbeinfach, wenn ihr Radikal trivial ist, also $rad(L) = 0$.

Erinnerung
$L \neq 0$ besitzt keine von Null verschiedenen abelschen Ideale genau dann, wenn $rad(L) = 0$.

Einschub 4.1
Für eine endlich dimensionale halbeinfache Lie-Algebra L gilt:
L ist direkte Summe ihrer einfachen Ideale. Jedes einfache Ideal von L ist direkter Summand.

Beweis
Sei $I \subset L$ ein Ideal. Dann ist auch $I^{\perp} = \{y \in L \,|\, \kappa(y, I) = 0\}$ ein Ideal, da die Killingform invariant ist. Wegen $\kappa_{I \cap I^{\perp}} = 0$ ist das Ideal $I \cap I^{\perp}$ nach dem Cartan Kriterium auflösbar (da κ nicht-ausgeartet, weil L halbeinfach).
Also $I \cap I^{\perp} = 0$, da L halbeinfach.
Betrachtet man nun die Dimensionen so folgt $I \oplus I^{\perp} = L$.
Jedes Ideal von I bzw. $I^{\perp}$ ist ebenfalls ein Ideal in L. I und $I^{\perp}$ sind somit ebenfalls halbeinfach.
Man kann also das Argument iterieren und erhält die folgende Zerlegung

$$L = \bigoplus_i I_i \text{ mit } I_i \text{ einfach}$$

Ist J ein weiteres einfaches Ideal von L, dann ist

$$J = [J, L] = \bigoplus_i [J, I_i]$$

und $[J, I_\nu]$ entweder gleich I_ν oder Null, da I_ν einfach.
Es folgt:
Jedes einfache Ideal von L tritt in der Zerlegung auf, $J = I_i$ für ein i.

□

Korollar 4.2
Insbesondere gilt für jede halbeinfache Lie-Algebra $L = [L, L]$, da $Z(L)$ ein abelsches Ideal ist.

Definition
Für eine Darstellung V einer Lie-Algebra L setzen wir

$$V^L = \{v \in V \,|\, x.v = 0 \,\forall\, x \in L\}$$

Die Elemente in V^L heißen *L-invariante Vektoren* von V.
Lemma 4.3

(i) Seien V,W Darstellungen einer Lie-Algebra L. Der Raum aller linearen Abbildungen $Hom_{\mathbb{C}}(V,W)$ wird eine Darstellung durch die Vorschrift

$$(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v) \quad \forall\, x \in L, v \in V, f \in Hom_{\mathbb{C}}(V,W)$$

(ii) Mit dieser Operation von L auf dem Homomorphismenraum gilt

$$Hom_L(V,W) = Hom_{\mathbb{C}}(V,W)^L$$

Beweis

(i) Nachrechnen:
Linearität, sei $x, y \in L, v \in V, f \in Hom(V,W), \lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} ((x+y).f)(v) &= (x+y).f(v) - f((x+y).v) \\ &= x.f(v) + y.f(v) - f(x.v) - f(y.v) \\ &= (x.f)(v) + (y.f)(v) \\ ((\lambda x).f)(v) &= (\lambda x).f(v) - f((\lambda x).v) \\ &= \lambda(x.f(v)) - \lambda f(x.v) \\ &= \lambda(x.f)(v) \end{aligned}$$

Verträglichkeit mit der Lie-Klammer

$$\begin{aligned} ([x,y].f)(v) &= [x,y].f(v) - f([x,y].v) \\ &= (xy - yx).f(v) - f((xy-yx).v) \\ &= xy.f(v) - yx.f(v) - (f(xy.v) - f(yx.v)) \\ &= (xy.f)(v) - (yx.f)(v) \end{aligned}$$

(ii) Beide Räume sind gleich dem Vektorraum

$$\{f \in Hom(V,W) \,|\, x.f(v) = f(x.v) \,\forall\, x \in L, v \in V\}$$

□

Lemma von Schur (4.4)
Sei V eine einfache Darstellung endlicher Dimension einer komplexen Lie-Algebra L. Dann gilt $End_L(V) = \mathbb{C}id_V$.

Beweis
Sei $\varphi \in End_L(V)$. Da $V \neq 0$ hat φ mindestens einen Eigenwert λ. Aus $\varphi \in End_L(V)$ folgt, dass $Eig(\varphi, \lambda)$ eine Unterdarstellung ist,denn: Sei $v \in Eig(\varphi, \lambda)$, dann folgt $\varphi(v) = \lambda v \Longrightarrow \varphi(x.v) = x.\varphi(v) = x.(\lambda v) = \lambda(x.v) \, \forall \, x \in L$. Da V einfach ist, gibt es keine echte Unterdarstellung. Daraus folgt, dass $V = Eig(\varphi, \lambda)$. Auf $Eig(\varphi, \lambda)$ operiert φ als Skalarmultiplikation λ und somit auch auf V.

$\square$

Definition
Eine Bilinearform $b : L \times L \longrightarrow k$ auf einer Lie-Algebra heißt *invariant* genau dann, wenn gilt $b([x,y],z) = b(x,[y,z]) \, \forall \, x,y,z \in L$.

Beispiel 4.5
Die Killing-Form ist invariant.

Sie nun L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra und $\phi : L \times L \longrightarrow k$ eine nicht-ausgeartete invariante Bilinearform. Für jede Darstellung V von L definieren wir eine lineare Selbstabbildung

$$C_\phi : V \longrightarrow V$$

wie folgt: Wähle eine Basis $x_1, ..., x_n$ von L und $z_1, ..., z_n$ die dazu duale Basis bezüglich der Bilinearform ϕ (d.h.: $\phi(x_i, z_j) = \delta_{ij}$). Setze

$$C_\phi = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$

Bemerkung 4.6
Die Abbildung C_ϕ hängt nicht von der Wahl der Basis von L ab. Wenn die Lie-Algebra L halbeinfach ist und $\phi = \kappa_L$ die Killing-Form ist, so heißt C_κ auch der *Casimir-Operator*.

Lemma 4.7
Der Vektorraum-Endomorphismus C_ϕ vertauscht mit jedem Element aus L,

also $C_\phi \in End_L(V)$.

Beweis
Rechnen wir für Koordinaten nach: Für $y \in L$ definieren wir die folgenden Lie-Klammern in den entsprechenden Basen:

$$[x_i, y] = \sum_j a_{ij} x_j, \quad [y, z_j] = \sum_i b_{ji} z_i$$

Aus der Invarianz der Bilinearform ϕ folgt:

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \sum_s a_{is} \phi(x_s, z_j) = \phi(\sum_s a_{is} x_s, z_j) \\
&= \phi([x_i, y], z_j) = \phi(x_i, [y, z_j]) \\
&= \phi(x_i, \sum_s b_{js} z_s) = \sum_s b_{js} \phi(x_i, z_s) \\
&= b_{ji}
\end{aligned}$$

Diese Identität benutzen wir im letzen Schritt der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}
[y, C_\phi] &= [y, \sum_i x_i, z_i] = \sum_i [y, x_i z_i] \\
&= \sum_i [y, x_i] z_i + \sum_i x_i [y, z_i] \\
&= -\sum_i [x_i, y] z_i + \sum_i x_i [y, z_i] \\
&= -\sum_i \sum_j a_{ij} x_j z_i + \sum_i x_i \sum_j b_{ji} z_j \\
&= -\sum_{i,j} b_{ji} x_j z_i + \sum_{i,j} x_i b_{ij} z_j \\
&= -\sum_{i,j} b_{ij} x_i z_j + \sum_{i,j} b_{ij} x_i z_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.8

(i) Ist V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $L \subseteq gl(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra, so ist $(x, y) \longmapsto tr_V(x.y)$ eine nicht ausgeartete invariante symmetrische Bilinearform $b = b_V$ auf L.

(ii) Für den zugehörigen Endomorphismus gilt $tr(C_b) = dim(L)$.

Beweis

(i) Die zyklische Invarianz (*damit ist gemeint, dass gilt: tr(gf) = tr(fg) für f,g* $\in End(V)$) der Spur impliziert, dass die Bilinearform b symmetrisch und invariant ist. Daraus folgt, dass das Radikal $rad(b_V)$ ein Ideal ist. Nach dem Cartan-Kriterium ist dieses Ideal sogar auflösbar, also Null, da L halbeinfach sein soll. Also ist die Bilinearform nicht ausgeartet.

(ii) Die Spur von C_b berechnen wir mit Hilfe einer Basis $\{x_i\}$ von L:

$$tr(C_b) = \sum_{i=1}^{dim\, L} tr(x_i z_i) = dim(L)$$

□

Lemma 4.9
Sei (V, ϕ) eine endlich-dimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra L. Dann gilt

$$V = V^L \oplus LV$$

Beweis
Induktion nach der Dimension von V:

(I.A.) dim V = 1
Es ist bekannt, dass jede eindimensionale Lie-Algebra nur eine eindimensionale Darstellung besitzt, nämlich gerade die triviale Darstellung (siehe 2.1 und 4.2).

(I.S.) dim V > 1
Man kann annehmen, dass $V \neq V^L$, da sonst nichts mehr zu zeigen ist.
Wir betrachten nun das Bild unter der Darstellung ϕ. Dieses ist gerade eine nicht-triviale halbeinfache Unteralgebra von $gl(V)$.
Sei C_ϕ unsere wie oben gewählte Bilinearform

$$C_\phi : V \to V$$

V zerfällt in die direkte Summe der Haupträume von C_ϕ. Diese sind somit Unterdarstellungen von V, da $[L, C_\phi] = 0$ nach Lemma 4.7.
Es können zwei Fälle eintreten:

(i) C_ϕ hat mehr als einen Eigenwert
Demnach lässt sich aber V als direkte Summe von Unterdarstellungen schreiben, auf welche sich die Induktionsvorraussetzung anwenden lässt.

(ii) C_ϕ hat einen einzigen Eigenwert:
Es folgt

$$\text{tr } C_\phi = \dim \varphi(L) \neq 0 \text{ wegen Lemma 4.8 (ii).}$$

Damit ist dieser Eigenwert nicht Null und es folgt $V = C_\phi V$.
Also $V = LV$.

□

Nun ist es uns möglich, den Satz von Weyl zu beweisen, indem wir die oben verifizierten Sätze und Lemmata anwenden.

5 Der Beweis

Sei $U \subset V$ eine Unterdarstellung.
Die Einschränkung auf U liefert uns nun die folgende Surjektion von Darstellungen:

$$Hom_{\mathbb{C}}(V,U) \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(U,U)$$

Benutzen wir das Lemma 4.9, so erhalten wir durch Einschränkung eine Surjektion auf den invarianten Vektoren der beiden Darstellungen

$$Hom_{\mathbb{C}}(V,U)^L \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(U,U)^L$$

$\Longrightarrow \exists$ Urbild f $\in Hom_{\mathbb{C}}(V,U)^L$ von $id_U \in Hom_{\mathbb{C}}(U,U)^L$.

$\Longrightarrow V = U \oplus Kerf$ ist direkte Zerlegung, da:

(i) $Kerf$ Unterdarstellung von V

(ii) $U \cap Kerf = 0$, denn wenn $v \in U \cap Kerf$ ist $0 = fv = v$

(iii) $V = Kerf + U$, denn schreibe $v \in V$ als $v = fv - (fv + v)$. Es ist $fv \in U$ und $f(fv + v) = fv - fv = 0$.

Zerlege nun induktiv die Darstellung V weiter, bis man einfache Darstellungen erhält. Es folgt die Behauptung.

□

Bemerkung
Der Satz von Weyl gilt ebenfalls für Lie-Algebren über einem Körper F mit F algebraisch abgeschlossen und $char(F) = 0$.