

Übungsaufgaben 1.

Nilpotente Endomorphismen, nilpotente Matrizen

Sei K ein Körper.

1. Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ nilpotent.

(a) Zeige: Ist $AB = BA$, so ist auch $A + B$ nilpotent.

(b) Zeige: Die Umkehrung gilt nicht (d.h.: Es gibt nilpotente $(n \times n)$ -Matrizen A, B mit $AB \neq BA$, so dass $A + B$ nilpotent ist).

(c) Zeige: Es gibt nilpotente $(n \times n)$ -Matrizen A, B mit $AB \neq BA$, so dass $A + B$ nicht nilpotent ist.

Hinweis: Statt (a) zeige man lieber eine entsprechende Aussage über kommutierende Elemente in einem beliebigen Ring \dots . Für (b) und (c) muss man jeweils ein Beispiel angeben.

2. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine obere $(n \times n)$ -Matrix mit Koeffizienten in K , sei $a_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Dagegen sei $a_{i,i+1} \neq 0$ für $1 \leq i < n$.

(a) Zeige: $\dim \text{Kern}(f_A) = 1$.

(b) Folgere daraus: A ist ähnlich zur Matrix $N((n))$.

(c) Dazu ein Beispiel: Sei $K = \mathbb{Q}$. Man bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & 0 & 3 & 4 & 5 \\ & & & 0 & 4 & 5 \\ 0 & & & & 0 & 5 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}AP = N((n))$.

3. (a) Sei V n -dimensionaler Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f^2 = 0$. Zeige: $\dim \text{Bild}(f) \leq \frac{n}{2}$.

(b). Sei $t \leq \frac{n}{2}$ eine natürliche Zahl. Konstruiere einen Endomorphismus $f: K^n \rightarrow K^n$ mit $f^2 = 0$ und $\dim \text{Bild}(f) = t$.

4. Wie sieht die Jordan'sche Normalform eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ (mit V endlich-dimensionaler Vektorraum) aus, für den $\text{Kern}(f) = \text{Bild}(f)$ gilt?

Hinweise zum Verfahren: siehe Rückseite.

Hinweise zum Übungsbetrieb.

Jede Woche gibt es einen Übungszettel, der üblicherweise in der Donnerstags-Vorlesung verteilt wird.

Die Lösungen sind am darauffolgenden Donnerstag bis 10:10 Uhr abzugeben (ins Postfach des jeweiligen Übungsleiters). Üblicherweise gibt es vier Aufgaben, für jede vollständig gelöste Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Lösungen der Aufgaben dürfen in n -Gruppen mit $n \leq 3$ abgegeben werden (also entweder allein oder in Zweier- oder Dreiergruppen). Der entsprechende Lösungszettel muß jeweils auch n Handschriften aufweisen, und jeder der Beteiligten muß bereit sein, jede der notierten Aufgaben vorzurechnen - nicht nur die mit der eigenen Handschrift! (Bei jeder der Aufgaben darf natürlich notiert werden, dass nur eine Teilmenge der Gruppe diese Lösung vorlegt und davor verantwortlich zeichnet).

Die Lösungen sind auf DIN A4-Blättern abzugeben: im Kopf eines jeden Blatts sind Name(n) und Übungsgruppe zu notieren.

Wichtig sind: lesbare Schrift, jeweils vollständige Sätze. In der Vorlesung bewiesene Sachverhalte dürfen verwendet werden, **alles andere ist zu beweisen**.

Die Aufgaben werden von den Übungsleitern korrigiert, bewertet und in den Übungsstunden besprochen. Üblicherweise werden Lösungen (oder auch partielle Lösungsansätze) von den Übungsteilnehmern an der Tafel vorgetragen, dabei sollen Formulierungen und Beweisideen von den übrigen Studierenden (und natürlich auch den Übungsleitern) immer hinterfragt, gegebenenfalls auch korrigiert werden.