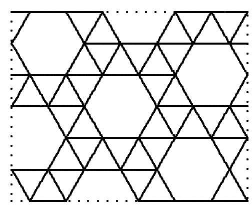
Übungsaufgaben 10.

1. Noch einmal: Die Aufgabe 4 vom Übungszettel 9.

2. Sei $n_1, \ldots, n_t$ eine Folge natürlicher Zahlen $n_i \geq 3$ mit $\sum_i \frac{n_i - 2}{n_i} = 2$, zum Beispiel also $(3,3,3,3,3,3)$, $(3,3,4,3,4)$, $(3,3,3,4,4)$, $(3,3,3,3,6), \ldots$.

(a) Wieviele derartige Folgen gibt es (bis auf zyklische Vertauschungen und Umkehr der Reihenfolge)?

(b) Zu jeder solchen Folge versuche man, eine "Pflasterung" der Ebene aus regulären n_i-Ecken mit Kantenlänge 1 zu konstruieren, dabei sollen in jedem Eckpunkt ein n_1-Eck, ein n_2-Eck, usw. aneinanderstoßen, entsprechend der Folge $(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ (oder ihrer Umkehrung). Zeige: In genau 11 Fällen ist dies möglich. (In diesen Fällen skizziere man die Pflasterungen; in den übrigen Fälle beweise man die Unmöglichkeit.) Hier als Beispiel ein Ausschnitt der Pflasterung zur Folge $(3,3,3,3,6)$:



Zeige: die jeweilige Symmetriegruppe ist eine ebene Kristallgruppe. Bestimme jeweils den Typ.

3. Geben Sie zu jeder der 17 ebenen Kristallgruppen G die Punktgruppe $\overline{G}$ an:

(a) Ist $\overline{G}$ eine Drehgruppe, so soll ein erzeugendes Element von $\overline{G}$ angegeben werden. Ist $\overline{G}$ keine Drehgruppe, so gebe man ein erzeugendes Element der Untergruppe aller Drehungen und zusätzlich Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen an, so dass für die zugehörigen Bewegungen $h_1, \ldots, h_n$ gilt: Die Restklassen $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n$ in $\overline{G}$ sind paarweise verschieden und liefern alle Spiegelungen in $\overline{G}$.

(b) Es gibt genau einen Fall mit Punktgruppe C_3. In diesem Fall, und in einem der Fälle mit Punktgruppe D_2 zeige man explizit, daß die Punktgruppe keine weiteren Elemente besitzt.

4. Zu jedem der Muster in der Anlage gebe man den zugehörigen Typ an.