Übungsaufgaben 11.

1. (a) Sei β eine uneigentliche Bewegung des $\mathbb{R}^2$. Zeige: β^2 ist eine Translation.

(Algebraisch: ein Einzeilenbeweis; man gebe zusätzlich eine geometrische Beschreibung)

(b) Man zeige: Genau dann ist ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ eine Spiegelung, wenn er die Eigenwerte 1 und -1 hat und wenn die zugehörigen Eigenvektoren zueinander orthogonal sind.

2. Sei G eine ebene Kristallgruppe, so dass gilt: Ist $1 \neq g \in G$, so besitzt g keinen Fixpunkt. Zeige, dass einer der folgenden Fälle vorliegt:

- G wird von zwei Translationen erzeugt.

Oder aber

- G wird von einer Translation und einer Gleitspiegelung erzeugt.

3. Zeige: Sei G eine ebene Kristallgruppe, sei $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid t_x \in G.\}$. Zeige: Enthält die Punktgruppe $\overline{G}$ eine Drehung mit Winkel $2\pi/3$, so bilden die Vektoren kürzester Länge ein gleichmäßiges Sechseck. und das Gitter L liefert eine Zerlegung der Ebene in gleichseitige Dreiecke.

4. Mit $\mathcal{B}(1)$ bezeichnen wir die Bewegungsgruppe des euklidschen Raums $\mathbb{R}^1$. Einige Elemente sind:

$$\begin{array}{rll} t_a & \text{mit} \quad t_a(x) = x + a, & \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}. \\ r & \text{mit} \quad t(x) = -x. & \end{array}$$

Man zeige:

$$\mathcal{B}(1) = \{t_a, t_a r \mid a \in \mathbb{R}\},$$

und diese Elemente sind paarweise verschieden.

Man berechne die Produkte $t_a t_b, r t_a, rr$.

Man bestimme alle diskreten Untergruppen von $\mathcal{B}(1)$. (Dazu ist es praktisch, für die jeweilige Untergruppe den Ursprung und die Länge des Einheitsvektors des Koordinatensystems passend zu wählen. Zu beweisen ist, dass die gefundene Liste vollständig ist.)