Übungsaufgaben 12.

Noch einmal Geometrie.

1. In der Beilage findet man einige Friese. Zuerst einige Beispiel aus der Kunstgeschichte. Dann Keramik-Friese (zum Teil mexikanisch). Als letztes die Fährten des Rothirsches: **a** ziehend, **b** flüchtend. Gib jeweils die zugehörigen Symmetriegruppen an.

2. Sei G eine Untergruppe von $\mathcal{B}(n)$. Eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Fundamentalbereich,* wenn gilt: Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein und nur ein $y \in F$ mit $y \in Gx$. (Es ist also $y = g(x)$ für ein $g \in G$, aber g muss nicht eindeutig bestimmt sein).

Man gebe für jede der 17 ebenen Kristallgruppen einen Fundamentalbereich an. (Zu beachten ist auf die jeweiligen Randpunkte: welche sollen zu F gehören, welche nicht!)

Und: Symmetrische Matrizen

3. Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrische Matrizen. Zeige

(a) Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} symmetrisch. Ganz allgemein gilt: die komplementäre Matrix $A^\sharp$ ist symmetrisch.

(b) Genau dann ist AB symmetrisch, wenn $AB = BA$ gilt.

4. (Verschiedene Grundkörper). Gesucht ist jeweils eine nilpotente symmetrische (2×2)-Matrix $A \neq 0$ mit Koeffizienten in K, dabei sei

$$\text{(a)}\quad K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},, \qquad \text{(b)}\quad K = \mathbb{Q}, \qquad \text{(c)}\quad K = \mathbb{C}.$$

In zwei der drei Fälle ist dies möglich (je ein Beispiel angeben), in einem Fall nicht (Beweis).