Übungsaufgaben 2. Jordan'sche Normalform.

Im Folgenden ist K ein Körper.

1. Sei $\gamma \in K$. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine obere $(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten in K, sei $a_{ii} = \gamma$ für $1 \leq i \leq n$. Zeige: Ist A ähnlich zu $J(\gamma, (n))$, so ist $a_{i,i+1} \neq 0$ für $1 \leq i < n$.

2. Bestimme die Hauptraum-Zerlegung von $\mathbb{Q}^4$ für folgende Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Seien $t, t' \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Jordan'sche Normalform über $\mathbb{C}$ der folgenden Matrizen:

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 1 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t' & -\sin t' \\ 0 & 0 & \sin t' & \cos t' \end{bmatrix}$$

4. (a) Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ f-invariante Unterräume. Zeige: $U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$ sind f-invariant.

(b) Seien $\gamma_1 \neq \gamma_2$ in K. Sei

$$A = J(\gamma_1, (3)) \oplus J(\gamma_2, (2)).$$

Man bestimme alle A-invarianten Unterräume von K^5.