Übungsaufgaben 3. Faktorräume.

Sei K ein Körper, alle Vektorräume seien K-Vektorräume.

1. Seien U, U' Unterräume des Vektorraums V. Zeige:
Die Zuordnung $g(u + (U \cap U')) = u + U'$ für $u \in U$ ist **wohldefiniert** und liefert einen Isomorphismus

$$g\colon U/(U \cap U') \longrightarrow (U + U')/U'.$$

2. Seien V, W Vektorräume, sei V' Unterraum von V, sei W' Unterraum von W. Sei $f\colon V \to W$ lineare Abbildung mit $f(V') \subseteq W'$. Sei U die Menge der Restklassen $v + V' \in V/V'$ mit $f(v) \in W'$. Zeige:
(a) U ist ein Unterraum von V/V'.
(b) Ist $v \in V$ mit $f(v) \in W'$, und setzen wir $\delta(v + V') = f(v) + f(V')$, so erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\delta\colon U \longrightarrow W'/f(V').$$

(Beachte: Zu zeigen ist insbesondere, dass die vorgeschlagene Zuordnung **wohldefiniert** ist! Die hier konstruierte Abbildung ist sehr wichtig: sie ist einer der Grundpfeiler der "homologischen Algebra".)

3. Seien $V_0, V_1, \ldots, V_{n+1}$ Vektorräume, dabei sei $V_0 = 0, V_{n+1} = 0$. Für $0 \le i \le n$ seien lineare Abbildungen $f_i\colon V_i \to V_{i+1}$ gegeben und es gelte $f_i f_{i-1} = 0$ für $1 \le i \le n$. Diese Voraussetzung besagt gerade: $\operatorname{Bild}(f_{i-1}) \subseteq \operatorname{Kern}(f_i)$, also können wir den Faktorraum $H_i = \operatorname{Kern}(f_i)/\operatorname{Bild}(f_{i-1})$ für $1 \le i \le n$ bilden.

Zeige:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = \sum\nolimits_{i=1}^{n} (-1)^i \dim H_i.$$

(Man nennt die Folge der V_i zusammen mit der Folge der Abbildungen f_i einen "Kettenkomplex", und man nennt H_i seine i-te "Homologie-Gruppe".)

4. (a) Seien V, W Vektorräume, sei $f\colon V \to W$ lineare Abbildung. Zeige: Ist W' ein Unterraum von W, so erhalten wir eine injektive lineare Abbildung

$$f\colon V/f^{-1}(W') \longrightarrow W/W'$$

durch $f(v + f^{-1}(W')) = f(v) + W'$.

(b) Was hat die in (a) formulierte Behauptung mit dem folgenden in der Vorlesung bewiesenen Lemma zu tun?

Lemma. *Sei f ein Endomorphismus von V, sei $j \ge 2$. Sei $(v_1, \ldots, v_s)$ eine Folge von Elementen in $\operatorname{Ker}(f^j)$, die modulo $\operatorname{Ker}(f^{j-1})$ linear unabhängig ist. Dann ist $(f(v_1), \ldots, f(v_s))$ eine Folge von Elementen in $\operatorname{Ker}(f^{j-1})$, die modulo $\operatorname{Ker}(f^{j-2})$ linear unabhängig ist.*