Übungsaufgaben 4. Faktorräume, Endomorphismen.

Sei K ein Körper, alle Vektorräume seien K-Vektorräume.

1. Seien U, V, W Vektorräume, seien $f: U \to V$ und $g: V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige: $\mathrm{Bild}(gf)$ ist isomorph zu $\mathrm{Bild}(f)/(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g))$.

2. Sei W ein Vektorraum, seien $U \subseteq V \subseteq W$ Unterräume von W. Zeige: Die kanonische Abbildung $W/U \to W/V$, die für $w \in W$ durch $U + w \mapsto V + w$ definiert ist, ist (wohldefiniert und) linear; ihr Kern ist V/U, ihr Bild ist W/V, also erhalten wir einen Isomorphismus

$$(W/U)/(V/U) \longrightarrow W/V.$$

3. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige: Es gibt f-invariante Unterräume V_1, V_2 von V mit $V = V_1 \oplus V_2$, sodass gilt: Die Einschränkung $f|V_1$ ist nilpotent, dagegen ist die Einschränkung $f|V_2$ ein Isomorphismus $V_2 \to V_2$.

4. Die formale Ableitung. Es sei an die Aufgabe I.12.4 erinnert: Sei $K[T]$ der Polynomring mit Koeffizienten in K. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{P}_n$ der Unterraum von $K[T]$ aller Polynome vom Grad höchstens n. Für $g = \sum_{s=0}^{n} c_s T^s$ in $K[T]$ (mit $c_i \in K$) definiert man $\delta(g) = \sum_{i=1}^{n} s c_s T^{s-1}$ und nennt dies die *(formale) Ableitung* des Polynoms p. Gezeigt wurde damals, dass die Abbildung $\delta: K[T] \to K[T]$ linear ist, $\mathcal{P}_n$ in sich abbildet, und es wurde ihr Rang berechnet.

(a) Nun soll gezeigt werden: Ist die Charakteristik von K gleich 0, so sind die Unterräume $\mathcal{P}_n$ die einzigen δ-invarianten Unterräume.

(b) Ist die Charakteristik von K gleich p (eine Primzahl), so ist $\delta^p = 0$.

(c) In beiden Fällen ist die Jordan'sche Normalform des Endomorphismus $\delta|\mathcal{P}_n$ von $\mathcal{P}_n$ zu berechnen.

Abgabe: Donnerstag, 12.05.2005.