Übungsaufgaben 5. Abbildungsräume, Dualraum.

Sei K ein Körper, alle Vektorräume seien K-Vektorräume.

Sei S eine endliche Menge, sei W ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Die beiden ersten Aufgaben dienen dazu, folgende Formel

$$(*) \qquad \dim \operatorname{Abb}(S, W) = |S| \cdot \dim W.$$

auf zwei verschiedene Weisen zu beweisen.

1. Sei $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Definiere für $s \in S$ und $1 \leq i \leq m$ eine Abbildung $f_{is}\colon S \to W$ durch $f_{is} : S \to W$ durch $f_{is}(s) = w_i$ und $f_{is}(s') = 0$ für $s' \neq s$ in S. Zeige: Die Abbildungen f_{is} bilden eine Basis von $\operatorname{Abb}(S, W)$.

Leite daraus die Formel $(*)$ ab.

2. Sei $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Für $1 \leq j \leq n$ setze

$$W_j = \{f \in \operatorname{Abb}(S, W) \mid f(j') = 0 \quad \text{für alle} \quad j' \neq j\}.$$

Zeige: W_j ist ein Unterraum von $\operatorname{Abb}(S, W)$, der zu W isomorph ist, und es gilt $W = \bigoplus_{j=1}^{n} W_j$. Auch hier soll daraus die Formel $(*)$ abgeleitet werden.

3. Transponieren einer Matrix. Sei $A \in M(m \times n, K)$. Sei $\mathcal{V} = (e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $V = K^n$, sei $\mathcal{W} = (e_1, \ldots, e_m)$ die kanonische Basis von $W = K^m$. Sei $\mathcal{V}^*$ die duale Basis zu $\mathcal{V}$, sei $\mathcal{W}^*$ die duale Basis zu $\mathcal{W}$. Zeige: Die duale Abbildung ${f_A}^* : W^* \to V^*$ hat die Matrizendarstellung

$$M^{\mathcal{W}^*}_{\mathcal{V}^*}({f_A}^*) = {}^tA.$$

Folgere daraus: Die Matrizen A und ${}^tA$ haben den gleichen Rang.

4. Sei V ein Vektorraum, sei $f\colon V \to V^*$ eine lineare Abbildung. Betrachte die Abbildung $\beta = \beta_f\colon V \times V \to K$, die durch $\beta(v, w) = f(v)(w)$ für $v, w \in V$ definiert ist. Zeige: es gelten die folgenden beiden Rechenregeln (für $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$):

$$\beta(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \beta(v, w_1) + \lambda_2 \beta(v, w_2),$$
$$\beta(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \beta(v_1, w) + \lambda_2 \beta(v_2, w).$$

Abbildungen $\beta\colon V \times V \to K$, die diese beiden Regenregeln erfüllen, nennt man *bilinear*. Zeige zweitens, dass es zu jeder bilineare Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$ eine lineare Abbildung $f\colon V \to V^*$ mit $\beta = \beta_f$ gibt.