Übungsaufgaben 6. Ein Rechenzettel.

1. Bestimme zu folgender Basis b_1, b_2, b_3, b_4 des Spaltenvektorraum K^4 die duale Basis $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ im Zeilenvektorraum K^4 :

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2. Bestimme mit Hilfe der Formel $(U_1 \cap U_2) = (U_1^\circ + U_2^\circ)^\circ$ den Durchschnitt der beiden Unterräume

$$U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{Q}^4$.

3. Zuordnung einer Matrix zu einer Bilinearform. Sei V der von den Polynomen $1, T, T^2, T^3$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}[T]$. Definiere eine Bilinearform $\varphi(-,-)$ auf V durch

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(T)g(T)\d{T}.$$

Berechne die Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$, so daß φ bezüglich der Basis $1, T, T^2, T^3$ durch die Matrix A beschrieben wird:

$$\varphi\left(\sum c_i T^i, \sum d_i T^i\right) = [c_0\ c_1\ c_2\ c_3] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

für alle $c_0, \ldots, c_3, d_0, \ldots, d_3 \in \mathbb{R}$.

4. Nachweis, daß eine Bilinearform positiv definit ist. Betrachte die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Koeffizienten $a_{ii} = 2$ für $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ für $1 \leq i < n$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Zeige: Die Bilinearform φ_A auf dem $\mathbb{R}^n$ ist positiv definit.