Übungsaufgaben 7. Noch einmal Rechenaufgaben ....

1. Orthonormalisieren. Betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen inneren Produkt $\langle -,- \rangle$; es ist also $\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \rangle = \sum x_i y_i$.

Orthonormalisiere die folgende Folge von Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Bestimmung des orthogonalen Komplements. Betrachte den euklid'schen Vektorraum V der Aufgabe 6.3. Es ist also V der von den Polynomen $1, T, T^2, T^3$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}[T]$, mit Bilinearform

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(T)g(T)\,\mathrm{d}T.$$

Sei U der von $1, T$ erzeugte Unterraum. Bestimme eine Basis von $U^\perp$, dies ist der Unterraum aller $v \in V$ mit $\varphi(u,v) = 0$ für alle $u \in U$.

... und einige Beweise

– analog zum Fall der euklid'schen Räume

Sei $V = (V, \langle -,- \rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Sei $f \colon V \to V$ ein unitärer Endomorphismus.

3. Orthonormalisierung. (a) Sei U ein Unterraum von V. Sei $u_1, \dots, u_m$ eine Orthonormalbasis von U. Ist $v \in V$, so setze

$$v' = v - \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Zeige erstens: $v' \in U^\perp$. Zweitens: Ist $v \in U$, so ist $v' = 0$. Drittens: Ist $v \notin U$, so sind die Vektoren $u_1, \dots, u_m, v$ linear unabhängig.

(b) Folgere daraus: Jede Orthonormalfolge eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums lässt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen. Insbesondere gilt also: Jeder endlich-dimensionale unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

4. (a) Ist γ ein Eigenwert von f, so ist $|\gamma| = 1$.

(b) Die Abbildung f ist injektiv. Ist V endlich-dimensional, so ist f bijektiv.

(c) Ist V endlich-dimensional, so ist das charakteristische Polynom von f von der Form $(T - \gamma_1) \cdots (T - \gamma_n)$ mit $|\gamma_i| = 1$ für $1 \leq i \leq n$.

(d) Zeige: Ist U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V, der f-invariant ist, so ist auch $U^\perp$ f-invariant.