Übungsaufgaben 8.

1. Das Wurzelsystem G_2. Betrachte die Menge P der Vektoren in $\mathbb{R}^2$

$$\varepsilon 2e_1,\ \varepsilon((m-3)e_1+\alpha e_2),\ \varepsilon 2\alpha e_2, \quad \text{mit} \quad \varepsilon \in \{1,-1\},\ m \in \{0,2,4,6\},$$

dabei ist $\alpha = \sqrt{3}$. Zeige: (a) Für jedes $a \in P$ gilt $\sigma_a(P) = P$. (b) Für $a, b \in P$ gilt $\frac{2\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \in \mathbb{Z}$.

2. Abstandsberechnung. Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die Ebenen

$$E(r) = \{{}^t[x,y,z] \mid x+y+z=r\} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechne den Abstand des Punkts ${}^t[1,2,3]$ von der Ebene $E(1)$.

(b) Berechne den Abstand der Ebenen $E(1)$ und $E(2)$.

3. (Aus der Biologie). Hier die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen A, AB, B, O bei Eskimos, Bantus, Engländern und Koreanern:

Blutgruppe	Esk	Ban	Eng	Kor
A	0,2914	0,1034	0,2090	0,2208
AB	0,0000	0,0866	0,0696	0,0000
B	0,0316	0,1200	0,0612	0,2069
O	0,6770	0,6800	0,6602	0,5723

Betrachte die jeweiligen Meßwertsätze (die Spalten) als Merkmalsvektoren

$$m^{\text{Esk}}, \quad m^{\text{Ban}}, \quad m^{\text{Eng}}, \quad m^{\text{Kor}} \quad \in \mathbb{R}^4;$$

zum Beispiel also $m^{\text{Esk}} = {}^t[\ 0{,}2914 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0316 \quad 0{,}6770\ ]$. Aufgabe: Bestimme die Winkel zwischen diesen Vektoren.

Interpretation: Den Winkel zwischen zwei derartigen Merkmalsvektoren, etwa zwischen m^{Esk} und m^{Ban} kann man als eine mögliche Definition für den *genetischen Abstand* (hier der Eskimos und der Bantus) verwenden. In unserem Beispiel: Welches ist der größte Abstand, welches der kleinste?

4. Eine Untergruppe L von $(\mathbb{R}^n,+)$ heißt *diskrete* Untergruppe, wenn es ein $\epsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist $0 \neq v \in L$, so ist $||v|| \geq \epsilon$.

Zeige: Sind v_1, v_2 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$, so ist die Menge $L = \{z_1v_1 + z_2v_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{Z}^2,+)$ (man nennt eine derartige Untergruppe L ein *Gitter* und v_1, v_2 eine *Gitterbasis* von L).

(a) Zeige: Sei v_1, v_2 eine Gitterbasis des Gitters $L \subset \mathbb{R}^2$. Genau dann ist $w = z_1 v_1 + z_2 v_2$ Element einer Gitterbasis w, w' von L, wenn die ganzen Zahlen z_1, z_2 teilerfremd sind.

(b) Zeige: Die Menge der Vektoren $[a, b] \in \mathbb{Z}^2$, für die $a + b$ eine gerade Zahl ist, ist ein Gitter. Man gebe 10 verschiedene Gitterbasen für dieses Gitter an (mit 10 Zeichnungen).