Übungsaufgaben 9. Geometrie..

1. Iwasawa-Zerlegung (oder QR-Zerlegung). Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. *Jede invertierbare Matrix $A \in M(n \times n, K)$ läßt sich als Produkt $A = PDU$ schreiben, dabei ist P für $K = \mathbb{R}$ eine orthogonale Matrix, für $K = \mathbb{C}$ eine unitäre Matrix, D eine Diagonalmatrix mit positiven reellen Diagonalkoeffizienten und U eine unipotente obere Dreiecksmatrix.* Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens. (Anleitung: Die Zeilen von A bilden eine Basis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$. — Das Verfahren ersetzt v_j durch eine Linearkombination $v'_j = \sum_{i \le j} b_{ij} v_i$ mit $b_{jj} > 0$. — Wir erhalten also eine obere Dreiecksmatrix $B = (b_{ij})_{ij}$ mit $P := AB$ orthogonal. — Also ist $A = PB^{-1}$. — Natürlich kann B^{-1} in der Form DU geschrieben werden.)

(b) Sei P eine obere $(n \times n)$-Dreiecksmatrix mit Koeffizienten in K, die Diagonalkoeffizienten seien positive reelle Zahlen. Zeige: *Ist P orthogonal (im Fall $K = \mathbb{R}$) oder unitär (im Fall $K = \mathbb{C}$), so ist P die Einheitsmatrix.* Folgere daraus: *Die in (a) konstruierte Faktorisierung $A = PDU$ ist eindeutig.*

2. (a) Zeige: Die Zuordnung $\eta \colon \mathcal{B}(n) \to GL(n+1, \mathbb{R})$

$$\eta(t_a \circ f_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{O}(n)$$

ist ein injektiver Gruppen-Homomorphismus; ist $\phi \in \mathcal{B}(n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$\eta(\phi) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi(x) \end{bmatrix}.$$

(b) Sei nun $n = 2$. Wie sieht $\eta(\phi)$ aus, wenn ϕ eine Translation, eine Drehung mit Drehwinkel $0 < \alpha < 2\pi$, eine Spiegelung, bzw. eine Gleitspiegelung ist?

1. Betrachte die Punkte $A = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$,
mit $a = \sqrt{2}$. Bestimme alle Drehungen des $\mathbb{R}^3$, die die Menge $\{A, B, C, D\}$ in sich überführen (gesucht sind die entsprechenden (3×3)-Matrizen bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$). Bestimme jeweils auch die Drehachse.

4. Seien $k, n \ge 3$ natürliche Zahlen mit $\frac{k(n-2)}{n} < 2$. Bestimme alle Möglichkeiten für k, n und zeige, daß zu jedem dieser Fälle in natürlicher Weise ein platonsicher Körper gehört (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Isokaeder).

Man beweise auf diese Weise folgenden Satz: es gibt genau fünf "konvexe, reguläre Polyeder", nämlich die platonischen Körper. (Gesucht ist hier insbesondere eine Definition von einem "konvexen, regulären Polyeder").