Übungsaufgaben 1.

Grundbegriffe

1. Sind U, V zwei Teilmengen einer Menge M, so nennt man

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

die *symmetrische Differenz.*

Zeige: Für jede Menge M ist $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ eine kommutative Gruppe.

2. Mit $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.
(a) Man zeige, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist.
(b) Man zeige, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ bezüglich $+$ und $\cdot$ ein Körper ist (also ein "Unterkörper" von $\mathbb{R}$).

(Dabei soll vorausgesetzt werden, dass man weiß, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist.)

3. Sei p eine Primzahl. Sei $G = G(p)$ die Menge der natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n \leq p - 1$. Definiere auf G eine Multiplikation $*$ auf folgende Weise: Sind $n, m \in G$, so sei $n{*}m$ die kleinste natürliche Zahl, so dass $nm - n{*}m$ ein ganzzahliges Vielfaches von p ist.

(a) Man zeige als erstes, dass $n * m$ zu G gehört. Man erhält also auf diese Weise eine Verknüpfung $* : G \times G \to G$.

(b) Man zeige: $(G, *)$ ist eine Gruppe.

Jede Woche gibt es einen Übungszettel, der voraussichtlich immer in der Donnerstags-Vorlesung verteilt wird. Die Lösungen sind eine Woche später abzugeben, sie werden von den Übungsleitern korrigiert, bewertet und in den Übungsstunden besprochen. Üblicherweise gibt es vier Aufgaben, für jede vollständig gelöste Aufgabe gibt es dann 3 Punkte. Dieser erste Aufgabenzettel enthält nur 3 Aufgaben (für die es jeweils 4 Punkte gibt). Die Lösungen sind auf DIN A4-Blättern abzugeben: Im Kopf eines jeden Blatts sind Name und Übungsgruppe zu notieren. Wichtig sind: lesbare Schrift, jeweils vollständige Sätze. In der Vorlesung bewiesene Sachverhalte dürfen verwendet werden, **alles andere ist zu beweisen**.