Übungsaufgaben 10.

Sei K ein Körper, alle Vektorräume seien K-Vektorräume.

1. Sei V ein Vektorraum, U, U' seien Unterräume von V. Zeige: Genau dann ist $U \cup U'$ ein Unterraum, wenn $U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$ gilt.

(Man sieht also: Die mengentheoretische Vereinigung zweier Unterräume ist nur in trivialen Fällen wieder ein Unterraum!).

2. Sei V ein K-Vektorraum, der nur eine einzige Basis $\mathcal{B}$ besitzt. Dann ist $|V| \leq 2$. (Ist $|V| = 1$, so besteht V nur aus dem Nullvektor: dann kann K beliebig sein und $\mathcal{B}$ ist die leere Menge. Ist $|V| = 2$, so muss K ein (= der) Körper mit zwei Elementen sein, und es ist $\mathcal{B} = \{v\}$ mit $0 \neq v \in V$.)

(Merkspruch: Vektorräume haben üblicherweise nicht nur eine einzige Basis.)

3. In der Vorlesung wurde gezeigt: Sei V ein Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem $\mathbf{E}$ der Kardinalität n. Ist $\mathbf{S}$ eine linear unabhängige Teilmenge der Kardinalität n, so ist $n \leq m$.

Man beweise dies auf folgende Weise: Sei $\mathbf{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathbf{E} = \{w_1, \dots, w_m\}$, sei $n > m$. Wir suchen eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. Dabei wollen wir die λ_i einer nicht-trivialen Lösung $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems $AX = 0$ mit n Variablen und m Gleichungen entnehmen. Welches Gleichungssystem $AX = 0$ nimmt man? Und warum besitzt es eine nicht-triviale Lösung?

4. Sei f_i ein Polynom vom Grad i, für $i \in \mathbb{N}_0$, mit Koeffizienten in K. Behauptung: $\{f_i | i \in I\}$ ist eine Basis von $K[T]$.

5. Sei $K = \mathbb{R}$. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der 12 Vektoren $\pm e_i \pm e_j$, mit $i \neq j$. Zeige: Es gibt eine Teilmenge $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathcal{M}$, sodass gilt: jedes Element aus $\mathcal{M}$ ist eine ganzzahlige Linearkombination $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i b_i$ und dabei sind alle drei Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entweder nicht-negativ oder nicht-positiv.