Übungsaufgaben 12: Lineare Abbildungen.

Sei K ein Körper, seien V, V' K-Vektorräume, sei $f: V \to V'$ linear.

1. Zeige:
(a) Ist U ein Unterraum von V, so ist $f^{-1}f(U) = U + \mathrm{Kern}(f)$.
(b) Ist U' ein Unterraum von V', so ist $ff^{-1}(U') = U' \cap \mathrm{Bild}(f)$.
(c) Die Zuordnung $U \mapsto f(U)$ liefert eine Bijektion zwischen den Unterräumen U von V mit $\mathrm{Kern}(f) \subseteq U$ und den Unterräumen U' von V' mit $U' \subseteq \mathrm{Bild}(f)$.

2. Zeige:
(a) Sind U_1, U_2 Unterräume von V, so gilt

$$\begin{aligned} f(U_1 \cap U_2) &\subseteq f(U_1) \cap f(U_2), \\ f(U_1 + U_2) &= f(U_1) + f(U_2). \end{aligned}$$

(b) Sind U_1', U_2' Unterräume von V', so gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1' \cap U_2') &= f^{-1}(U_1') \cap f^{-1}(U_2'), \\ f^{-1}(U_1' + U_2') &\supseteq f^{-1}(U_1') + f^{-1}(U_2'). \end{aligned}$$

(c) Zeige durch Beispiele, dass das Inklusionszeichen $\subseteq$ in (a) und das Inklusionszeichen $\supseteq$ in (b) nicht durch Gleichheitszeichen ersetzt werden können.

3. Sei $f: V \to V$ linear mit $f^2 = f$.
(a) Zeige: Es gibt Unterräume U_1, U_2 von V mit $V = U_1 \oplus U_2$ (dies bedeutet: $U_1 + U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = 0$, siehe Übungsblatt 11), sodass gilt: $f(u) = u$ für $u \in U_1$ und $f(u) = 0$ für $u \in U_2$.
(b) Zeige: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix mit Koeffizienten 0 und 1 ist.

4. Sei $K[T]$ der Polynomring mit Koeffizienten in K. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{P}_n$ der Unterraum von $K[T]$ aller Polynome vom Grad höchstens n.
Für $g = \sum_{s=0}^{n} c_s T^s$ in $K[T]$ (mit $c_i \in K$) definiert man $\delta(g) = \sum_{i=1}^{n} s c_s T^{s-1}$ und nennt dies die *(formale) Ableitung* des Polynoms p.
Zeige:
(a) Die Abbildung $\delta: K[T] \to K[T]$ ist linear und bildet $\mathcal{P}_n$ in sich ab.
(b) Bestimme den Rang der Abbildung $\delta: \mathcal{P}_9 \to \mathcal{P}_9$ für $K = \mathbb{R}$ und für $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p Primzahl).

(Hinweis: Ist $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ so ist $\delta(g)$ gerade die Ableitung von g im Sinn der Analysis – ist dagegen zum Beispiel $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so definieren wir $\delta(g)$ eben einfach durch die angegebene Formel!).