Übungsaufgaben 13: Eigenvektoren und Eigenwerte.

Sei K ein Körper.

1. Im FISCHER, p.216 steht folgende Warnung: Sei F ein Endomorphismus von K^n. *Selbst wenn F diagonalisierbar ist, braucht nicht* **jeder** *Vektor ungleich Null ein Eigenvektor zu sein.* Dies sollte Ihnen völlig klar sein! Zeigen Sie dazu, daß für jede $(n \times n)$-Matrix A gilt:

(a) Sind v_1, v_2 Eigenvektoren zu A mit Eigenwerten λ_1, beziehungsweise λ_2, und ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist $v_1 + v_2$ von Null verschieden und **kein** Eigenvektor.

(b) Man folgere aus (a), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) Jeder von Null verschiedene Vektor des K^n ist Eigenvektor für A.
(ii) Die Matrix A ist ähnlich zu einer Skalarmatrix.
(iii) Die Matrix A **ist** eine Skalarmatrix.

2. Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, ..., v_n\}$. Sei $v = \sum_i v_i$. Sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und jedes v_i sei ein Eigenvektor zu f mit Eigenwert γ_i. Zeige: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) Die Elemente $\gamma_1, ..., \gamma_n$ sind paarweise verschieden.
(ii) Ist U ein Unterraum von V mit $v \in U$ und $f(U) \subseteq U$, so ist $U = V$.
(iii) Die Vektoren $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ bilden eine Basis von V.

3. Einmal eine Rechenaufgabe: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen $A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Können die Matrizen diagonalisiert werden?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Noch eine Rechenaufgabe (und auch eine Zeichenaufgabe). Betrachte die (2×2)-Matrix

$$C = C(a,b) = \begin{bmatrix} ba - 1 & -a \\ b & -1 \end{bmatrix}.$$

dabei seien $a, b \in \mathbb{N}_1$.

(1) Bestimme Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren über $\mathbb{R}$. (Welche Fälle muß man unterscheiden?)

(2) Was kann man über die Operation der Potenzen C^n (mit $n \gg 0$) auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ sagen ? (Mit Skizzen für die Fälle $a = b \in \{1, 2, 3, 4\}$.)