Übungsaufgaben 2.

Sei R ein kommutativer Ring.

1. Seien $a, b, c, d \in R$. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Man zeige: Gelten die beiden Bedingungen

$$a + d = 0 \quad \text{und} \quad ad - bc = 0,$$

so ist $A^2 = 0$.

2. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine (5×5)-Matrix mit Koeffizienten in R. Ist $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i \geq j$, so ist $A^5 = 0$.

(Hinweis: Man überlege sich, welche Form die Matrizen A^2, A^3, A^4 haben müssen — man vermeide dabei, unnötig Koeffizienten auszurechnen...)

3. Zeige: Sei A eine (2×2)-Matrix mit Koeffizienten im kommutativen Ring R. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(i) Es ist $AB = BA$ für alle (2×2)-Matrizen mit Koeffizienten in R.
(ii) Es gilt $AE_{12} = E_{12}A$ und $AE_{21} = E_{21}A$.
(iii) A ist eine Skalarmatrix (also $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ für ein $a \in R$).

Dabei bezeichnen wir ganz allgemein mit E_{st} die $(m \times n)$-Matrix deren (s, t)-Koeffizient 1 ist, während alle anderen Koeffizienten 0 sind; im Rahmen dieser Aufgabe sind E_{12} und E_{21} also die entsprechenden (2×2)-Matrizen.)

4. Ihre persönliche Matrix: Nehmen Sie Ihre Matrikelnummer $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ (dabei ist x_i die i-te Ziffer, also $0 \leq x_i \leq 9$) und bilden Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}.$$

Bringen Sie diese Matrix mit den Maple-Befehlen `addrow, swaprow` in Zeilenstufenform (als Lösung ist der Maple-Ausdruck beizulegen).