Übungsaufgaben 3.

Sei R ein Ring.

Sei $n \in \mathbb{N}_1$. Man nennt $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, R)$ eine *obere Dreiecksmatrix,* falls gilt: $a_{ij} = 0$ für $i > j$.

1. Zeige: Die oberen Dreiecksmatrizen bilden einen Unterring des Rings $M(n \times n, R)$.

2. Man zeige: Die Matrizen der Form $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ in $M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ bilden einen Unterring von $M(2 \times 2, \mathbb{Q})$, und dieser Unterring ist ein Körper.

Hinweis zu Aufgabe 1 und 2: Man überlege sich genau, was zu zeigen ist — nur das soll auch gezeigt werden!

3. In Verallgemeinerung von Aufgabe 3 des Übungszettels 2 zeige man: Sei $A \in M(n \times n, R)$. Genau dann gilt $AB = BA$ für alle $B \in M(n \times n, R)$, wenn A eine Skalarmatrix ist.

Wie in der Bedingung (ii) der alten Aufgabe suche man auch hier nach einer **kleinen** Teilmenge $\mathcal{T}$ von $M(n \times n, R)$, so dass gilt: Ist A mit allen Matrizen $T \in \mathcal{T}$ vertauschbar, so ist A mit allen Matrizen in $M(n \times n, R)$ vertauschbar.

4. Sei K ein Körper. Man nennt $A \in M(n \times n, K)$ eine *Monomialmatrix,* falls es in jeder Zeile und in jeder Spalte jeweils genau einen von Null verschiedenen Koeffizienten gibt. Man zeige:

(a) Jede Monomial-Matrix ist invertierbar (wie sieht die inverse Matrix aus?)

(b) Die Monomialmatrizen bilden eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(n, K)$ aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen.

Hier soll vorausgesetzt werden (was implizit in der Vorlesung schon gezeigt wurde): Die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, man nennt sie die $\mathrm{GL}(n, K)$.