Übungsaufgaben 5.

Ähnlichkeit.

1. Sei R ein Ring, seien S, S' Unterringe von R. Zeige

(a) Auch $S \cap S'$ ist ein Unterring von R.

(b) Ist $r \in R$ invertierbar, so ist $r^{-1}Sr$ ebenfalls ein Unterring von R.

(c) Sei $n = 3$. Es gibt 6 verschiedene Permutationsmatrizen P in $M(n \times n, R)$. Sei N^+ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $M(n \times n, R)$, deren Diagonalkoeffizienten alle gleich 1 sind. Man bestimme jeweils $N^+ \cap P^{-1}N^+P$.

Zusatz (freiwillig): Für $n = 4$ gibt es 24 verschiedene Permutationsmatrizen P in $M(4 \times 4, R)$. Man bestimme entsprechend alle $N^+ \cap P^{-1}N^+P$, zum Beispiel mit MAPLE.

(Hinweis: Um einen Koeffizienten in einer Matrix A durch 0 zu ersetzen, kann man folgendermaßen vorgehen: Sei N die (1×1)-Matrix mit Koeffizient 0. Der Befehl **copyinto(N,A,i,j)** ersetzt den (i, j)-Koeffizienten von A durch Null.)

2. Sei R ein Ring, seien $A, B, C \in M(n \times n, R)$. Man nennt A, B *ähnlich* (oder *konjugiert*), falls es ein $P \in GL(n, R)$ gibt mit $B = PAP^{-1}$. Zeige:

(a) Die Matrizen A, A sind ähnlich (“Reflexivität”).

(b) Sind die Matrizen A, B ähnlich, so sind die Matrizen B, A ähnlich (“Symmetrie”)

(c) Sind die Matrizen A, B ähnlich, und sind die Matrizen B, C ähnlich, so sind die Matrizen A, C ähnlich (“Transitivität”).

(d) Ist R kommutativ, und sind die Matrizen A, B ähnlich, so haben A, B die gleiche Spur.

3. Sei K ein Körper, seien $\lambda, \mu \in K$. Zeige: die Matrix $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ ist genau dann zu einer Diagonalmatrix ähnlich, wenn $\lambda \neq \mu$ gilt.

Permutationen

4. Man nennt eine Permutation $\sigma \in S_n$ eine *Transposition,* falls es Zahlen $1 \leq s < t \leq n$ mit $\sigma(s) = t, \sigma(t) = s, \sigma(i) = i$ für alle $i \notin \{s, t\}$.

Zeige: Jede Permutation ist Hintereinanderschaltung von Transpositionen.