Übungsaufgaben 6.

Determinanten.

Sei R ein kommutativer Ring.

1. Sei $A \in M(n \times n, R)$; $B \in M(n \times m, R)$, $C \in M(m \times m, R)$. Betrachte $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, dies sei die $(m+n) \times (m+n)$-Matrix $D = (d_{ij})_{ij}$, mit

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls} \quad i \leq n,\ j \leq n, \\ b_{i,j-n} & \phantom{\text{falls}} \quad i \leq n,\ j > n, \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad i > n,\ j \leq n, \\ c_{i-n,j-n} & \phantom{\text{falls}} \quad i > n,\ j > n. \end{cases}$$

Zeige:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \cdot \det C$$

2. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten in R. Setze $B = (b_{ij})_{ij}$ mit $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. Zeige $\det A = \det B$ auf zwei verschiedenen Weisen:

- Mit Hilfe der Leibniz-Formel.
- Mit Hilfe des Determinanten-Produkt-Satzes: Schreibe $B = SAT$ mit geeigneten Diagonalmatrizen S, T.

Dabei darf der Determinanten-Produkt-Satzes vorausgesetzt werden: sind C, D in $M(n \times n, R)$, so ist $\det(CD) = (\det C)(\det D)$.

3. Seien $a_1, \ldots, a_t \in R$. Zeige mit Induktion nach n:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

LR-Zerlegung.

4. Sei K ein Körper, sei $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$. Für jedes $1 \leq i \leq t$ setze $A_t = (a_{ij})_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq t}$, dies ist also eine $(t \times t)$-Matrix. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L und eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $A = LR$.
(ii) Alle Matrizen A_t mit $1 \leq t \leq n$ sind invertierbar.