Übungsaufgaben 7.

1. Die Zahlen 92 344, 53 227, 25 755, 20 927 und 78 421 sind teilbar durch 17. Die Determinante der Matrix

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ist ebenfalls durch 17 teilbar. Gibt es dafür einen Grund?.

(Gesucht ist ein allgemeiner Satz der Form: Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit ... , der dieses Phänomen erklärt. Und natürlich der Beweis des Satzes.)

2. Das Transponieren. Sei R ein Ring. Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in M(m \times n, R)$, so nennt man die Matrix ${}^tA = (b_{ij})_{ij} \in M(n \times m, R)$ mit $b_{ij} = a_{ji}$ die zu A *transponierte* Matrix. Zeige: Sind $A, B \in M(m \times n, R)$, und $C \in M(n \times r, R)$, so gilt:

(a) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
(b) ${}^t(-A) = -{}^tA$.
(c) ${}^t(A \cdot C) = {}^tC \cdot {}^tA$.
(d) Ist A invertierbar, so auch ${}^tA$ und es ist $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3. Das Lie-Produkt. Sei R kommutativer Ring. Seien $A, B \in M(n \times n, R)$. Definiere $[A, B] = AB - BA$. Zeige:

(a) (Bilinearität): Sind $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \in M(n \times n, R)$, und $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, so gilt:

$$[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B] = \lambda_1[A_1, B] + \lambda_2[A_2, B],$$

und

$$[A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2] = \lambda_1[A, B_1] + \lambda_2[A, B_2].$$

(b) Für alle $A \in M(n \times n, R)$ gilt $[A, A] = 0$.
(c) (Jacobi-Identität). Für alle $A, B, C \in M(n \times n, R)$ gilt:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

4. Sei K ein Körper. Zeige:

(a) Eine (2×2)-Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.
(2) Es gibt kein $\lambda \in K$ mit $c = \lambda a$ und $d = \lambda b$.

(b) Sei K ein Körper mit q Elementen ($q \geq 2$ eine natürliche Zahl). Man bestimme die Ordnung von $\mathrm{GL}(2, K)$.

(Hinweis: Es gibt einen derartigen Körper K genau dann, wenn q eine Primzahlpotenz ist; und K ist “bis auf Isomorphie” eindeutig: dies wird im Rahmen der Vorlesung *Algebra I* gezeigt.)

Hinweise

Ab jetzt dürfen Lösungen der Aufgaben in n-Gruppen mit $n \leq 3$ abgegeben werden (also entweder allein oder in Zweier- oder Dreiergruppen). Der entsprechende Lösungszettel muß jeweils auch n Handschriften aufweisen, und jeder der Beteiligten muß bereit sein, **jede** der notierten Aufgaben vorzurechnen - nicht nur die mit der eigenen Handschrift! (Bei jeder der Aufgaben darf natürlich notiert werden, dass nur eine Teilmenge der Gruppe diese Lösung vorlegt...).

Zur Probeklausur 1: Sie findet am Samstag, 4.12.2004 um 9:15 im Audimax statt, Dauer: 90 Minuten. Insgesamt kann man 30 Punkte erzielen.

Es gibt Aufgaben, die denen der Übungszettel 1-6, den Routine-Zetteln und dem Test entsprechen (die aber schon aus Zeitgründen einfacher sind als die üblichen Übungsaufgaben.)

Bei der offiziellen Klausur am Ende des Semester (am 19.02.2005, auch diese nur 90 min.) gibt es drei thematische Teile

(1) Matrizen
(2) Vektorräume
(3) Endomorphismen

Für jeden der drei Teile kann man 30 Punkte erzielen. Dabei entsprechen die Aufgaben zum Teil (1) solchen der ersten Probeklausur, die zum Teil (2) denen der zweiten Probeklausur. Ein positives Ergebnis bei den Probeklausuren kann auf folgende Weise in die Endbewertung einfließen: Auf Wunsch kann die Punktzahl x in Teil (1) durch das arithmetische Mittel von x und der Punktzahl in der ersten Probeklausur ersetzt werden. Entsprechendes gilt für Teil (2) und die zweite Probeklausur. Dies sollte ein Anreiz zur Teilnahme an den Probeklausuren sein.