Übungsaufgaben 8.

Polynome (und ganze Zahlen)

1. Sei $R = \mathbb{Z}$ oder $R = \mathbb{Q}[T]$. Mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus bestimme man jeweils $c = \mathrm{ggT}(a,b)$ (zu notieren sind jeweils die Ergebnisse, die beim Teilen mit Rest auftreten) und man schreibe c in der Form $c = au + bv$ mit $u, v \in R$.

(a) Es sei $R = \mathbb{Z}$ und

$$a = 97\,059\,503, \quad b = 96\,049\,601.$$

(b) Es sei $R = \mathbb{Q}[T]$ (Polynomring) und

$$a = T^5 + 2T^4 + T^3 + T^2 + 2T + 1, \quad b = T^5 + T^3 + T^2 + 1.$$

2. Sei K ein Körper, $\lambda \in K$. Man bestimme das Minimalpolynom der Matrix

$$J(\lambda, n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda E_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}.$$

3. Sei K ein Körper. Ohne Verwendung des Satzes von Cayley-Hamilton zeige man: Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, K)$ eine Diagonalmatrix, und gilt $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \{d_1, \dots, d_m\}$ mit paarweise verschiedenen Elementen $d_1, \dots, d_m$, so ist das Minimalpolynom von A das Polynom

$$\prod_{i=1}^{m} (T - d_i).$$

4. Sei K ein Körper, seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$. Bestimme das charakteristische Polynom der $(n \times n)$-Matrix $A = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i} + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} E_{in}$.