End-Klausur 20.08.05

Für jede Aufgabe stehen 7,5 min zur Verfügung. Jede der Aufgaben sollte in höchstens 7 Minuten zu bearbeiten sein, einige aber schon in einer Minute! Im ersten Durchgang sollte man nach jeweils 7 Minuten zur nächsten Aufgabe übergehen! Bei den Aufgaben mit dem Zusatz **nur Antwort** soll **nur die Antwort** notiert werden (ohne Beweis, ohne Angabe des Rechenverfahrens); Nebenrechnungen bitte auf den leeren Zwischenblättern.

Teil A.

1. Gesucht ist eine invertierbare Matrix $P \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(nur **Antwort**).

2. Sei $A \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ mit Minimalpolynom T^2. Welche Möglichkeiten gibt es für die zugehörige Jordan'sche Normalform ? (Nur **Antwort**).

3. Seien V, W Vektorräume, sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige: Durch $\overline{f}(\overline{v}) = f(v)$ für $v \in V$ erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\overline{f} \colon V/\operatorname{Kern}(f) \longrightarrow W.$$

4. Man orthonormalisiere die folgende Folge von Vektoren im euklid'schen Raum $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(nur **Antwort**).

5. Sei A eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix. Zeige:
(a) Ist n ungerade, so besitzt A einen Eigenvektor.
(b) Ist dagegen $n = 4$, so braucht A keinen Eigenvektor zu besitzen.

(Der Haupsatz über orthogonale Endomorphismen darf als bekannt vorausgesetzt werden).

6. Sei U ein Unterraum des k-Vektorraums V, mit $\dim U = 3,\ \dim V = 5$. Man gebe die Dimension der folgenden Vektorräume an:

$$V/U, \quad \mathrm{Hom}_k(V,U), \quad V^*, \quad U^\circ$$

(nur die **Antworten**).

Teil B.

7. Beweise: Ist f selbstadjungierter Endomorphismus eines unitären Vektorraums, so ist jeder Eigenwert von f reell.

8. Bestimme die Hauptachsen der Quadrik

$$4X^2 - 2XY + 4Y^2 = 4.$$

(nur **Antwort**; für eine Skizze gibt es allerdings Extrapunkte.)

9. (a) Man gebe die Punktgruppe $\overline{G}$ zu folgendem Tapetenmuster an:

$$\begin{array}{cccccc} \sqcap & \sqsupset & \sqcap & \sqsupset & \sqcap & \sqsupset \\ \sqsubset & \sqcup & \sqsubset & \sqcup & \sqsubset & \sqcup \\ \sqcap & \sqsupset & \sqcap & \sqsupset & \sqcap & \sqsupset \\ \sqsubset & \sqcup & \sqsubset & \sqcup & \sqsubset & \sqcup \end{array}$$

(nur **Antwort**).

(b) Sei G die volle Symmetriegruppe eines regelmäßigen 7-Ecks. Man gebe die Ordnung von G an. Wieviele Drehungen, wieviele Spiegelungen enthält G? (nur die **Antworten**).

10. Ist die folgende reelle Matrix positiv definit?

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix},$$

(Antwort mit Begründung).

11. Betrachte die Vektoren $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Sei $L = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$. Gesucht sind drei verschiedene Vektoren b_1, b_2, b_3 mit $L = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b_i$ für $i = 1, 2, 3$. (Nur **Antwort.**)

12. Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^9$ mit Signatur $(5, 3, 1)$. Zeige: Ist U ein total-isotroper Unterraum, so ist $\dim U \leq 4.$.