**Matrikelnr:** **Name:**
**Tutor:** **Vorname:**
**Studiengang:** **Geburtsort:**

## Klausur 19.02.05

Jede der folgenden Aufgaben sollte in höchstens 4 Minuten zu bearbeiten sein. Im ersten Durchgang sollte man nach jeweils 4 Minuten zur nächsten Aufgabe übergehen!

Bei den Aufgaben mit dem Zusatz **ohne Beweis** soll **nur die Antwort** notiert werden (ohne Beweis, ohne Angabe des Rechenverfahrens); Nebenrechnungen bitte auf den zusätzlich verteilten leeren Seiten.

---

### Teil I

**1.** (Ohne Beweis) Man gebe alle invertierbaren $(2 \times 2)$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an.

**2.** Betrachte die Matrizen $A(n) = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ mit $a_{ij} = i + j - 1$. Für $n \geq 3$ ist $\det A(n) = 0$. Warum ?

**3.** Sei $K$ ein Körper. Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ ähnlich. Zeige: Ist A nilpotent, so ist B nilpotent.

**4.** Sei $K$ ein Körper. Zeige: die Menge $\mathcal{M}$ der $(8 \times 8)$-Matrizen der Form $Q_{57}(\lambda) = I_8 + \lambda E_{57}$ mit $\lambda \in K$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(8, K)$. Ist $\mathcal{M}$ ein Unterring von $M(8 \times 8, K)$ ?

**5.** (Ohne Beweis) Man bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -10 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

in Zeilenstufenform:

---

## Teil II

**6.** Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $A^2 = A$ und keine Skalarmatrix. Wie lautet das Minimalpolynom von $A$ ? Begründung!

**7.** (Ohne Beweis)
Betrachte die Menge $\mathcal{A}$ der folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^5$

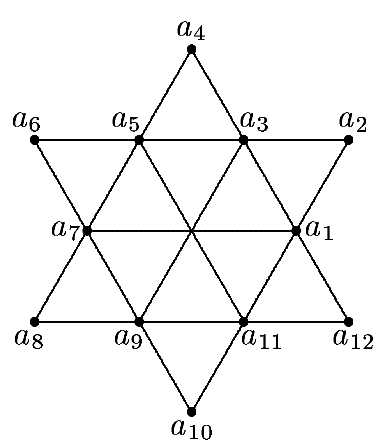
$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Gesucht ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, sodass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

**8.** (Ohne Beweis)
Sei $K$ ein Körper. Betrachte folgende Teilmengen $U_i$ von $K^5$. Frage: Ist $U_i$ ein Untervektorraum?

| | immer | nie | hängt von $K$ ab |
|---|---|---|---|
| $U_1 = \{x \in K^5 \mid x_2 = 0 \text{ oder } x_2 = 1\}$ | ○ | ○ | ○ |
| $U_2 = \{x \in K^5 \mid x_2 = 0 \text{ und } x_2 = 1\}$ | ○ | ○ | ○ |
| $U_3 = \{x \in K^5 \mid x_2 \neq 1\}$ | ○ | ○ | ○ |
| $U_4 = \{x \in K^5 \mid (x_2 + x_3)^3 = 0\}$ | ○ | ○ | ○ |
| $U_5 = \{x \in K^5 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 + x_5 = 0\}$ | ○ | ○ | ○ |

**9.** (Ohne Beweis)
Betrachte in der Ebene $\mathbb{R}^2$ die folgenden 12 gleichseitigen Dreiecke, dabei sei der Mittelpunkt dieser Konfiguration der Ursprung des Koordinatensystems. Sei $\mathcal{A}$ die Menge der 12 äußeren Eckpunkte. Gesucht ist eine Teilmenge $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} \subset \mathcal{A}$, sodass sich jeder Vektor in $\mathcal{A}$ als ganzzahlige Linearkombination der Vektoren $b_1, b_2$ schreiben lässt, mit Koeffizienten, die entweder alle nicht-negativ oder alle nicht-positiv sind.



**10.** (Ohne Beweis)
Sei $K$ ein Körper. Seien $U_1, U_2$ 5-dimensionale Unterräume von $K^7$.
Sei $U = U_1 \cap U_2$. Was weiß man über $\dim U$ ?

---

## Teil III

**11.** Seien $U_1, U_2, U_3$ Unterräume des Vektorraums $V$. Man zeige:

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) \supseteq \big(U_2 + (U_3 \cap U_1)\big) \cap \big((U_3 + (U_1 \cap U_2)\big).$$

**12.** Beweisen Sie (ohne explizite Rechnung): Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix (alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze dürfen verwendet werden).

**13.** (Ohne Beweis) Geben Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ an, die den Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ als Eigenvektor mit Eigenwert 1 und den Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Eigenvektor mit Eigenwert $-1$ hat.

**14.** Gibt es einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dessen Bild der Unterraum

$$\{(r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

ist, und für den $f^2 = 0$ gilt ?

(Beweis, dass dies unmöglich ist, oder Angabe einer derartigen Abbildung.)

**15.** Sei $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Man zeige: $A$ lässt sich in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ als Produkt einer Drehmatrix und einer Skalarmatrix schreiben.

---

**Bewertung:**

Pro Aufgabe gab es 2 Punkte.

Die Aufgabe 8 wurde folgendermaßen bewertet:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Richtige Anworten: | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Punkte: | 2 | 3/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 |