

Probe-Klausur 23.06.05

Für jede Aufgabe stehen 7,5 min zur Verfügung. Jede der Aufgaben sollte in höchstens 7 Minuten zu bearbeiten sein. Im ersten Durchgang sollte man nach jeweils 7 Minuten zur nächsten Aufgabe übergehen! Bei den Aufgaben mit dem Zusatz **nur Antwort** soll **nur die Antwort** notiert werden (ohne Beweis, ohne Angabe des Rechenverfahrens); Nebenrechnungen bitte auf den leeren Zwischenblättern.

1. Sei $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom $T^4 - T^2$. Welche Möglichkeiten gibt es für die zugehörige Jordan'sche Normalform? (Nur **Antwort**).

2. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Welche A -invarianten Unterräume im $\mathbb{R}^3$ gibt es? (Nur **Antwort**)

3. Gesucht ist eine invertierbare Matrix $P \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(nur **Antwort**).

4. Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f^2 = 0$. Man setzt $H(f) = \text{Kern}(f) / \text{Bild}(f)$. **Beweise:**

$$\dim V = \dim H(f) + 2 \dim \text{Bild}(f).$$

(Alle in der Vorlesung bewiesenen Sätze dürfen verwendet werden.)

5. Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum, seien U_1, U_2, W Unterräume von V mit $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \subseteq W$. **Beweise:**

$$W \subseteq U_1 + (U_2 \cap W).$$

6. Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_4$, sei $\phi_1, \dots, \phi_4$ die duale Basis. Sei U der von $v_1 - v_2$ und $v_2 - v_3$ erzeugte Unterraum von V . Man bestimme eine Basis von U° . (Nur **Antwort**.)

7. Sei W ein Vektorraum, seien $U \subseteq V \subseteq W$ Unterräume von W . **Beweise:** Durch die Vorschrift $f(w + U) = w + V$ für $w \in W$ erhält man eine wohldefinierte Abbildung $f: W/U \rightarrow W/V$. (Es soll nur die Wohldefiniertheit gezeigt werden, nicht dagegen, dass diese Abbildung auch linear ist).

8. Man orthonormalisiere die folgende Folge von Vektoren im euklid'schen Raum $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(nur **Antwort**).

9. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ unitärer Endomorphismus.

Beweise: Jeder Eigenwert von f hat den Betrag 1.

10. Berechne im $\mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^4$

- (i) die Länge des Vektors a
- (ii) den Winkel zwischen den Vektoren a und b
- (iii) den Abstand des Punkts c von der Geraden $d + \mathbb{R}e$.
- (iv) einen zu f orthogonalen Vektor der Länge 1.

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

(nur die **Antworten**).

12. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal? welche unitär?

	orthogonal	unitär	weder-noch
$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐
$\begin{bmatrix} 2 \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & 2 \cos \alpha \end{bmatrix}$	☐	☐	☐
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐

11. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:	wahr	falsch
Ist A orthogonale Matrix, so hat jeder Eigenwert den Betrag 1.	☐	☐
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Matrix, deren Eigenwerte alle den Betrag 1 haben. Dann ist A unitär.	☐	☐
Sei $v_1, \dots, v_n$ Orthonormalbasis eines euklid'schen Vektorraums. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Ist auch $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ eine Orthonormalbasis, so gilt $\lambda_i = 1$ für alle i .	☐	☐
Jede unitäre Matrix ist diagonalisierbar.	☐	☐
Seien σ_1, σ_2 Spiegelungen an Ursprungsgeraden von $\mathbb{R}^2$. Dann ist auch $\sigma_1 \sigma_2$ eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.	☐	☐
Sei $v_1, \dots, v_n$ Orthonormalbasis eines euklid'schen Vektorraums. Dann ist auch $-v_1, \dots, -v_n$ eine Orthonormalbasis.	☐	☐

Bewertung: Pro richtig gelöster Aufgabe gab es 2 Punkte.

Bei der Aufgabe 11 gab es für n richtige Zeilen $\max(0, \frac{n}{2} - 1)$ Punkte (eigentlich zu viel, denn bei willkürlichem Ankreuzen hat man auf diese Weise im statistischen Mittel noch 0,5 Punkte erhalten.)

Bei der Aufgabe 12 gab es für n richtige Zeilen $\max(0, n - 2)$ Punkte.