Leitfaden – Lineare Algebra: Determinanten

Die symmetrische Gruppe S_n. Eine *Permutation* σ der Menge S ist eine bijektive Abbildung $\sigma\colon S \to S$. Ist S eine endliche Menge, so reicht es zu verlangen, dass σ injektiv ist, dass also gilt: ist $i \neq i'$, so ist $\sigma(i) \neq \sigma(i')$. Insbesondere interessieren uns Permutationen der Menge $\{1,2,\dots,n\}$, wir notieren eine derartige Permutation zum Beispiel in der Form $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Die Menge aller Permutationen der Menge $\{1,2,\dots,n\}$ bezeichnen wir mit S_n, dies ist eine Gruppe mit der Hintereinanderschaltung von Permutationen als Verknüpfung. Offensichtlich gilt $|S_n| = n!$.

Transpositionen. Ist $i \neq j$, so bezeichnen wir mit τ_{ij} die Permutation, die i und j vertauscht und alle anderen Elemente nicht bewegt (also $\tau_{ij}(s) = s$ für $s \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{i,j\}$.) Man nennt τ_{ij} eine *Transposition.* Die Transpositionen der Form $\tau_{i,i+1}$ heißen *Nachbarschaftstranspositionen.* Es gilt: *Jede Permuation kann als Hintereinanderschaltung von Nachbarschaftstranspositionen geschrieben werden.* (meist auf ganz verschiedene Weisen, denn es gilt zum Beispiel: $\tau_{12}\tau_{23}\tau_{12} = \tau_{23}\tau_{12}\tau_{23}$).

Signum. Ist $\sigma \in S_n$, so nennen wir jedes Paar (i,j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(j) < \sigma(i)$ eine *Fehlstellung.* Ist die Anzahl der Fehlstellungen gerade, so nennt man σ eine *gerade* Permutation, andernfalls eine *ungerade* Permutation. Man schreibt

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \sigma \quad \text{gerade} \\ -1 & \text{falls} \quad \sigma \quad \text{ungerade} \end{cases}.$$

und nennt $\operatorname{sign}(\sigma)$ das *Signum* der Permutation σ. Zur Berechnung des Signums: Sei $f(\sigma)$ die Anzahl der Fehlstellungen. Dann gilt

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{f(\sigma)} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Man rechnet leicht nach: Die Permutation τ_{ij} mit $i < j$ besitzt genau $2(j-i-1)+1$ Fehlstellungen (nämlich das Paar (i,j) und alle Paare (i,s) und (s,t) mit $i < s < j$, demnach ist jede Transposition τ_{ij} ungerade.

Nachtrag zu den Grundbegriffen der Gruppentheorie.

Gruppen-Homomorphismus. Sind $G = (G,*)$ und $H = (H,\circ)$ Gruppen, und $f\colon G \to H$ eine Abbildung, so nennt man f einen Gruppen-Homomorphismus, falls für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2).$$

Einen Homomorphismus, der bijektiv ist, nennt man einen *Isomorphismus.*

Ist $f\colon G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus, so ist $f(1_G) = 1_H$ und $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$, für jedes $g \in G$. (Beweis: Es ist $f(1_G)^2 = f(1_G^2) = f(1_G)$. Und $f(g^{-1})f(g) = f(g^{-1}g) = f(1_G) = 1_H$.)

Ist $f\colon G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus, so nennt man $\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$ den *Kern* von f. *Dies ist eine Untergruppe von G.*

Es gilt: *Die Zuordnung*

$$\mathrm{sign}(-) : S_n \longrightarrow (\{+1, -1\}, \cdot)$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus. Beweis: Sei $\sigma \in S_n$. Ist $\tau_{i,i+1}$ eine Nachbarschafts-Transposition, so unterscheiden sich die Anzahl der Fehlstellungen von $\sigma\circ\tau_{i,i+1}$ und σ um 1 — ist nämlich $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, so hat $\sigma\circ\tau_{i,i+1}$ eine Fehlstellung mehr als σ, sonst eine weniger. Demnach ist $\mathrm{sign}(\sigma\circ\tau_{i,i+1}) = -\,\mathrm{sign}(\sigma)$. Daher gilt: Schreibt man σ als Hintereinanderschaltung von s Nachbarschafts-Transpositionen, so ist

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } s \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } s \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Sei nun auch $\tau \in S_n$. Um zu sehen, dass gilt $\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = (\mathrm{sign}(\sigma))(\mathrm{sign}(\tau))$, schreibe man σ und τ beide als Produkte von Nachbarschafts-Transpositionen.

Sei A_n die Untergruppe von S_n aller geraden Permutationen. Die Abbildung $\mathrm{sign}\colon S_n \to (\{1, -1\}, \cdot)$ ist ein Gruppen-Homomorphismus, A_n ist sein Kern. Man nennt die Gruppen A_n die **alternierenden Gruppen.**

Ist $\tau \in S_n$ eine beliebige ungerade Permutation, so liefern die Zurodnungen $\sigma \mapsto \sigma\circ\tau$ und $\sigma \mapsto \tau\circ\sigma$ Bijektionen von A_n auf die Menge der ungeraden Permutationen. Insbesondere gilt: $|A_n| = \frac{1}{2}n!$ falls $n \geq 2$.

Permutationsmatrizen. Jeder Permutation $\sigma \in S_n$ ordnen wir die Permutationsmatrix $P(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)})_{ij}$ zu (mit $\delta_{i,\sigma(j)} = 1$, falls $i = \sigma(j)$ und 0 sonst). Es ist also

$$P(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} E_{\sigma(j),j} = \sum_{i=1}^{n} E_{i\sigma^{-1}(i)}.$$

Die Permutationsmatrizen $P(\tau_{ij})$ haben wir mit P_{ij} bezeichnet.

Es gilt: *Die Zuordnung $\sigma \mapsto P(\sigma)$ ist ein Gruppen-Homomorphismus $S_n \to GL(n, R)$.* Ist $R \neq 0$, so ist diese Zuordnung injektiv.

Es gilt:

$$P(\sigma)E_{ij} = E_{\sigma(i),j}, \quad \text{und} \quad E_{ij}P(\sigma) = E_{i,\sigma^{-1}(j)}.$$

Beweise: Jeweils nachrechnen.

Determinanten.

Sei R ein **kommutativer** Ring. Wir betrachten $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in R.

Leibniz-Formel (LEIBNIZ 1646-1716). Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine $n\times n$-Matrix mit Koeffizienten in R. Wir setzen

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Die einzelnen Summanden sind folgendermaßen gebildet: Man bildet Produkte mit n Faktoren, dabei kommt jeweils ein Faktor aus jeder der n Reihen, aber auch jeweils aus jeder der n Spalten. Die Positionen sind also die möglichen Positionen von n Türmen auf dem $(n \times n)$-Schachbrett, die sich gegenseitig nicht schlagen. Eine derartige Verteilung von n Türmen liefert gerade eine Permutation σ, wenn wir notieren, dass in der j-ten Spalte das $\sigma(j)$-te Feld belegt ist. Jedes dieser Produkte ist mit einem Vorzeichen versehen.

Im Fall $n = 2$ und $n = 3$ kann man die Leibnizformel noch einigermaßen überblicken:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc,$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & \quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Eine $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt; entsprechend spricht man von einer *unteren Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für $i < j$ gilt; man nennt A eine *Diagonalmatrix* falls $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt. Diagonalmatrizen mit $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ heißen *Skalarmatrizen.*

Beispiel: *Ist die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ eine obere Dreiecksmatrix oder eine untere Dreiecksmatrix, so gilt* $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Wichtigste Eigenschaft: *Ist A eine quadratische Matrix mit zwei gleichen Zeilen, so ist* $\det A = 0$. Zum Beweis zeigt man, dass in der Leibniz-Formel jeweils zwei Summanden den gleichen Betrag, aber verschiedenes Vorzeichen haben.

Verhalten der Determinanten bei Zeilen-Unformungen.

- *Entsteht A' aus A dadurch, dass die i-te Zeile von A mit λ multipliziert wird, so ist* $\det A' = \lambda \det A$. (Es ist $A' = S_i(\lambda)A$, mit $S_i(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ii}$.)
- *Entsteht A' aus A dadurch, dass man das λ-fache der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile addiert wird, so ist* $\det A' = \det A$. (Es ist $A' = Q_{ij}(\lambda)A$, mit $Q_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$.)
- *Entsteht A' aus A dadurch, dass man die i-te Zeile und die j-te Zeile mit $i \neq j$ miteinander vertauscht, so ist* $\det A' = -\det A$. (Es ist $A' = P_{ij}A$, mit $P_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.)

Entsprechendes gilt für Spalten-Umformungen.

Es sei an folgendes erinnert: Ist K ein Körper, und A eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in K, so kann A durch Multiplikation von rechts und von links mit Matrizen der Form $Q_{ij}(\lambda)$ in eine Diagonalmatrix D überführt werden. Wie wir gerade gesehen haben, gilt: *dabei ändert sich die Determinante nicht* (und die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt der Diagonalkoeffizienten). Es reicht natürlich, die Matrix A in eine Dreiecksmatrix zu überführen und dann das Produkt der Diagonalkoeffizienten zu bilden. Meist verwendet man zusätzlich Zeilen- oder Spaltenvertauschungen, dabei ändert sich dann jeweils nur das Vorzeichen.

Ist A eine Matrix, so entsteht die Matrix A_{ij} durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte (bei einer $m \times n$ Matrix können wir also A_{ij} für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ bilden).

Laplace-Entwicklung. (LAPLACE 1749-1827). *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Für jedes i gilt*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Beweis. Wir betrachten zusätzlich auch die Matrix $B_{ij} = (b_{ij})_{ij}$, deren i-te Zeile die folgende Form hat: an der Stelle (i,j) steht der Koeffizient 1, alle anderen Koeffizienten der i-ten Zeile sind 0, und die restlichen Koeffizienten sind diejenigen der Matrix A (also $b_{st} = a_{st}$ falls $s \neq i$). Es ist

$$\begin{aligned}
\det B_{ij} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{i,\sigma(i)} \cdots b_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n,\, \sigma(i)=j} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{i,\sigma(i)} \cdots b_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n,\, \sigma(i)=j} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i-1,\sigma(i-1)} \cdot 1 \cdot a_{i+1,\sigma(i+1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},
\end{aligned}$$

andererseits können wir B_{ij} durch Vertauschen von Zeilen und Spalten in eine Matrix der folgenden Form überführen:

$$A'_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dazu müssen wir die i-te Zeile mit allen nachfolgenden Zeilen vertauschen, insgesamt sind dies $n-i$ Zeilenvertauschungen, und wir müssen die j-te Spalte mit allen nachfolgenden Spalten vertauschen, insgesamt sind dies $n-j$ Spaltenvertauschungen. Es ist also:

$$\det B_{ij} = (-1)^{n-i+n-j} \det A'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

(Wir haben verwendet, dass $(-1)^{n-i+n-j} = (-1)^{i+j}$ gilt.)

Mit diesen Vorbemerkungen ist der Beweis einfach:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i)=j} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(i)=j} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i-1,\sigma(i-1)} \cdot 1 \cdot a_{i+1,\sigma(i+1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}
\end{aligned}$$

Dies ist die Laplace-Entwicklung nach Zeilen. Es gibt eine entsprechende Laplace-Entwicklung nach Spalten: *Für jedes* j *gilt*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Die komplementäre Matrix zu A. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Setze $A^\sharp = (a'_{ij})_{ij}$ mit $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ (beachte die Indexvertauschung); man nennt $A^\sharp$ die *komplementäre Matrix* zu A, manchmal nennt man $A^\sharp$ auch die *(klassische) Adjunkte* zu A, in Maple heißt der entsprechende Befehl `adjoint(A)`.

Satz (Laplace). *Sei* $A \in M(n \times n, R)$. *Es ist* $AA^\sharp = A^\sharp A = \det A \cdot I_n$.

Beweis: Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ und $A^\sharp = (a'_{ij})_{ij}$ mit $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$. Setze $AA^\sharp = (c_{ik})_{ik}$. Also ist

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} a'_{jk} = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{kj}.$$

Die Laplace-Entwicklung nach der i-ten Reihe zeigt, dass wir für $i = k$ gerade $\det A$ erhalten. Sei nun $i \neq k$. Die Matrix B entstehe aus A, indem wir die k-te Zeile von A durch die i-te Zeile von A ersetzen, alle anderen Zeilen aber übernehmen. Da B zwei gleiche Zeilen (nämlich die i-te und die k-te) hat, liefert die Laplace-Entwicklung der Matrix B nach der k-ten Zeile:

$$\sum_j (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} = \det B = 0.$$

Andererseits ist aber $b_{kj} = a_{ij}$ und $B_{kj} = A_{kj}$ für alle j, also

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} \\ &= \sum_j (-1)^{k+j} a_{ij} \det A_{kj} \\ &= (-1)^{k-i} \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{kj} = (-1)^{k-i} c_{ik}. \end{aligned}$$

Wir sehen also: $c_{ik} = 0$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass gilt $AA^\sharp = \det A \cdot I_n$. Entsprechend sieht man $A^\sharp A = \det A \cdot I_n$ mit Hilfe der Laplace-Entwicklung nach Spalten.

Wie wir gesehen haben, beruht der Beweis auf den Laplace-Entwicklungen, und auf der Tatsache, dass die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen oder zwei gleichen Spalten Null ist. Natürlich kann man die Laplace-Entwicklungen aus der Formel wieder ableiten.

Folgerung. *Ist* $A \in M(n \times n, R)$ *und ist* $\det A$ *in* R *invertierbar, so ist* A *invertierbar und es gilt*

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} A^{\sharp}.$$

Determinanten-Produktsatz. *Sind* A, B *zwei* $n \times n$ *Matrizen mit Koeffizienten in* R*, so ist*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Beweis: Wir beweisen hier diesen Satz nur für einen Ring R, der Unterring eines Körpers K ist!

Seien also $A, B \in M(n \times n, R)$. Schreibe $A = A_1 A_2 \cdots A_m$ als Produkt von m Matrizen A_i der Form $Q_{ij}(\lambda)$ (mit $i \neq j$) oder $S_i(\lambda)$, mit $\lambda \in K$ (dabei ist wie üblich $Q_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$, und $S_i(\lambda) = I + (\lambda - 1) E_{ii}$). Induktion nach m. Ist $m = 1$, so ist A eine Matrix der Form $S_i(\lambda)$ oder $Q_{ij}(\lambda)$. In beiden Fällen wissen wir schon, dass die Behauptung gilt. Induktions-Schritt: Es ist

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(A_1 A_2 \cdots A_m B) \\
&= \det A_1 \cdot \det(A_1 \cdots A_m B) \\
&= \det A_1 \cdot \det(A_2 \cdots A_m) \cdot \det B \\
&= \det(A_1 A_2 \cdots A_m) \cdot \det B = \det A \cdot \det B.
\end{aligned}$$

dabei haben wir beim zweiten und beim vierten Gleichheitszeichen den Induktionsanfang verwandt, beim dritten den Fall $m - 1$.

Folgerung. *Eine* $(n \times n)$*-Matrix* A *mit Koeffizienten in* R *ist genau dann invertierbar in* $M(n \times n, R)$*, wenn* $\det A$ *in* R *invertierbar ist.*

Beweis: Aus $AA^{-1} = I_n$ folgt wegen des Produktsatzes $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det I_n = 1$, also ist $\det A$ in R invertiebrbar. Die Umkehrung haben wir oben mit Hilfe der komplementären Matrix notiert.

Wofür braucht man Determinanten? Zum Beispiel, wenn man ein lineares Gleichungssystem mit n Zeilen und n Variablen gegeben hat. Erinnerung: Manchmal gibt es keine Lösung, manchmal gibt es viele Lösungen.

Satz. *Ein lineares Gleichungssystem mit n Zeilen,* n *Variablen und mit Koeffizienten in einem Körper besitzt genau dann eine und nur eine Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verschieden ist.*