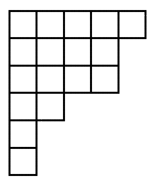
1. Die Jordan'sche Normalform.

1A. Nilpotente Matrizen, nilpotente Endomorphismen.

Partitionen. Sei n eine natürliche Zahl. Eine *Partition* von n ist eine Folge $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ von natürlichen Zahlen λ_i, so dass gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t \geq 1$ und $\sum_i \lambda_i = n$. (Manchmal ist es sinnvoll, die Folge $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ durch Nullen fortzusetzen, also $\lambda_i = 0$ für $i > t$ zu schreiben.)

Young-Diagramm. Jeder Partition ordnet man ein sogenanntes *Young-Diagramm* zu: man betrachtet ein Kästchenmuster mit t Kästchenreihen, linksbündig untereinander gesetzt, wobei die t-te Reihe aus λ_i Kästchen besteht. Analog zur Indizierung der Positionen in einer Matrix kann man diese Kästchen durch die Pare (i, j) mit $1 \leq j \leq \lambda_i$ und $1 \leq i \leq t$ indizieren. Beispiel: Das Young-Digramm zur Partition $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$ hat die Form



Wir wollen die Kästchen durchnummerieren, und zwar zeilenweise, von links nach rechts, und von oben nach unten:

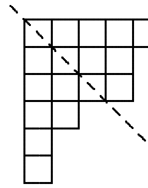
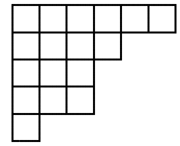
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	
(4,1)	(4,2)			
(5,1)				
(6,1)				

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11	12	13	
14	15			
16				
17				

jeder Position (i, j) haben wir auf diese Weise eine Zahl $\nu(i, j)$ zugeordnet, ν ist eine Bijektion zwischen der Menge $\{(i, j) \mid 1 \leq j \leq \lambda_i,\ 1 \leq i \leq t\}$ und $\{1, 2, \dots, n\}$. Natürlich können wir ν durch eine Formel festlegen: es ist $\nu(i, j) = j + \sum_{r<i} \lambda_r$.

Duale Partitionen. Ist $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ eine Partition von n, so bildet man die **duale** Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{\lambda_1})$ wie folgt: Es sei $\lambda'_j = |\{\lambda_i \mid \lambda_i \geq j\}|$, dies ist im Young-Diagramm gerade die Anzahl der Kästchen in der j-ten Spalte.

Insbesondere ist λ' ebenfalls eine Partition von n. Die zu $\lambda = (5,4,4,2,1,1)$ duale Partition ist $\lambda' = (6,4,3,3,1)$.

λ  λ' 

Links ist gestrichelt eine Gerade eingezeichnet: man erhält das Young-Diagramm von λ' aus dem Young-Diagramms von von λ durch Spiegelung an dieser Geraden. Auf diese Weise sieht man unmittelbar, dass gilt: $(\lambda')' = \lambda$.

Der nilpotente Endomorphismus f_λ zur Partition λ. Jeder Partition λ von n ordnet man einen Endomorphismus $f_\lambda\colon K^n \to K^n$ wie folgt zu. Man benennt die kanonischen Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ um, und zwar setzt man $e_{ij} = e_{ij}^{(\lambda)} = e_{\nu(ij)}$. Setze

$$f_\lambda(e_{ij}) = \begin{cases} e_{i,j-1} & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} j > 1, \\ \\ j = 1. \end{matrix}$$

Wir ordnen der Partition λ auch eine $(n \times n)$-Matrix $N(\lambda)$ zu (die *Jordan-Matrix* zur Partition λ mit Eigenwert 0), hier als typisches Beispiel der Fall $\lambda = (5,4,4,2,1,1)$:

$$N((5,4,4,2,1,1)) = \begin{bmatrix} \begin{matrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&1&\\&&&0&1\\&&&&0\end{matrix} &&&&& \\ & \begin{matrix}0&1&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{matrix} &&&& \\ && \begin{matrix}0&1&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{matrix} &&& \\ &&& \begin{matrix}0&1\\&0\end{matrix} && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{bmatrix}$$

wobei alle weiteren Einträge Nullen sind. Die allgemeine Regel lautet: es ist $N(\lambda) = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{r,r+1} = 1$ für alle r, die nicht von der Form $\sum_{i\le s} \lambda_i$ sind, und $a_{ij} = 0$ sonst. Entlang der Diagonale sind also entsprechende $(\lambda_i \times \lambda_i)$-Matrizen aufgereiht.

Natürlich ist $N(\lambda)$ die Matrizendarstellung von f_λ bezüglich der kanonischen Basis des K^n.

Satz. *Sei λ eine Partition. Für jede natürliche Zahl s gilt*

$$\operatorname{Ker}(f_\lambda^s) = \langle e_{ij} \mid 1 \le j \le s \rangle.$$

Beweis: Sei $f = f_\lambda$. Setze

$$V' = \langle e_{ij} \mid j \le s \rangle.$$
$$V'' = \langle e_{ij} \mid j > s \rangle.$$

Dann ist $K^n = V' + V''$. Offensichtlich ist V' in $\operatorname{Ker}(f^s)$ enthalten. Andererseits gilt: Die Einschränkung von f^s auf V'' ist injektiv, denn die Vektoren e_{ij} mit $j > s$ bilden eine Basis von V'' und diese Basisvektoren werden unter f^s auf die Vektoren $e_{i,j-s}$ abgebildet - die Vektoren der Form $e_{i,j-s}$ (mit $j > s$) sind aber linear unabhängig.

Es genügt, folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma. *Sei $g\colon V \to W$ lineare Abbildung. Seien V', V'' Unterräume von V mit $V = V' + V''$. Ist $V' \subseteq \operatorname{Ker}(g)$ und ist die Einschränkung von g auf V'' injektiv, so ist $V' = \operatorname{Ker}(g)$.*

Beweis: Zu zeigen ist $\operatorname{Ker}(g) \subseteq V'$. Sei also $v \in \operatorname{Ker}(g)$. Wegen $V = V' + V''$ können wir $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$ schreiben. Es gilt

$$0 = g(v) = g(v' + v'') = g(v') + g(v'') = g(v'').$$

Also ist v'' im Kern von g. Da wir voraussetzen, dass die Einschränkung von g auf V'' injektiv ist, folgt $v'' = 0$, also $v = v' \in V'$.

Folgerung 1.

$$\dim \operatorname{Ker}(f^s) = \sum_{j=1}^{s} \lambda'_j,$$

also

$$\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda^s) - \dim \operatorname{Ker}(f_\lambda^{s-1}) = \lambda'_s.$$

Folgerung 2. *Seien λ, μ Partitionen von n. Ist $\lambda \neq \mu$, so sind die Matrizen $N(\lambda)$ und $N(\mu)$ nicht ähnlich.*

Beweis: Angenommen, die Matrizen $N(\lambda)$ und $N(\mu)$ sind ähnlich. Dann sind auch die Matrizen $N(\lambda)^s$ und $N(\mu)^s$ für jedes s ähnlich. Sind aber Matrizen A, B ähnlich, so haben die Kerne der linearen Abbildungen f_A und f_B die gleiche Dimension. Es ist $f_{N(\lambda)^s} = f_\lambda^s$ und $f_{N(\mu)^s} = f_\mu^s$. Wir verwenden nun Folgerung 1:

$$\lambda'_s = \dim \operatorname{Ker}(f_\lambda^s) - \dim \operatorname{Ker}(f_\lambda^{s-1}) = \dim \operatorname{Ker}(f_\mu^s) - \dim \operatorname{Ker}(f_\mu^{s-1}) = \mu'_s.$$

Da $\lambda'_s = \mu'_s$ für alle s gilt, ist $\lambda' = \mu'$, also $\lambda = \mu$.

Satz 2. *Sei K ein Körper. Zu jeder nilpotenten $(n \times n)$-Matrix A mit Koeffizienten in K gibt es eine Partition λ von n, so dass A und $N(\lambda)$ ähnlich sind.*

Zweite Formulierung. *Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und ist $f\colon V \to V$ nilpotenter Endomorphismus, so gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V und eine Partition λ von n mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = N(\lambda)$.*

Zusatz (bezogen auf die zweite Formulierung): Die Partition λ kann folgendermaßen berechnet werden: Die zu λ duale Partition λ' ist durch

$$\lambda'_j = \dim \operatorname{Ker}(f^j) - \dim \operatorname{Ker}(f^{j-1})$$

für alle $j \geq 1$ gegeben; aus λ' erhält man $\lambda = (\lambda')'$.

Beachte: Die Partition λ ist wegen der Folgerung 2 eindeutig, dagegen ist die Basis $\mathcal{B}$ nicht eindeutig bestimmt!

Beweis. Sei $f\colon V \to V$ nilpotenter Endomorphismus, sei $\dim V = n$.

Ziel: Wir suchen eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ von n und eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = N(\lambda)$. Das bedeutet, dass wir die Elemente der Basis $\mathcal{B}$ in der Form v_{ij} mit $1 \leq i \leq t$, und $1 \leq j \leq \lambda_i$ schreiben können, sodass gilt:

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} v_{i,j-1} & \\ & \text{falls} \\ 0 & \end{cases} \quad \begin{matrix} j > 1, \\ \\ j = 1. \end{matrix}$$

Statt λ werden wir zuerst die zu λ duale Partition λ' konstruieren (um daraus vermöge $\lambda = (\lambda')'$ auf λ zu schließen. In der Tat lässt sich λ' recht einfach berechnen!

Beginn des Beweises. Sei etwa $f^r = 0$. Dann gilt:
- $\operatorname{Ker} f^0 = 0$.
- $\operatorname{Ker} f^{j-1} \subseteq \operatorname{Ker} f^j$ für $1 \leq j \leq r$.
- $\operatorname{Ker} f^r = V$.

Setzen wir
$$\lambda'_j = \dim \operatorname{Ker}(f^j) - \dim \operatorname{Ker}(f^{j-1}),$$
so sehen wir, dass $\lambda'_j \geq 0$ gilt. Noch wissen wir nicht, dass es sich bei $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots)$ wirklich um eine Partition handelt (dass also jeweils $\lambda'_j \geq \lambda'_{j+1}$ gilt); dies wird aber bald beiwesen werden.

Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, sollen drei neue Begriffe eingeführt werden:

Einschub: Komplementärbasen.

Sei V ein Vektorraum, U ein Unterraum. Eine Folge $(v_1, \ldots, v_t)$ von Vektoren aus V heißt *linear unabhängig modulo* U, falls folgendes gilt: sind λ_i Skalare in K und ist $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i v_i \in U$, so sind alle $\lambda_i = 0$. Die Folge $(v_1, \ldots, v_t)$ von Vektoren aus V heißt *Komplementärbasis* von U in V, falls erstens die Folge $(v_1, \ldots, v_t)$ linear unabhängig modulo U ist, und zweitens U zusammen mit den Vektoren $v_1, \ldots, v_t$ den Vektorraum V erzeugt.

(1) *Die Folge* $(v_1, \ldots, v_t)$ *ist genau dann linear unabhängig modulo* U*, wenn erstens diese Folge linear unabhängig ist und zweitens*

$$U \cap \langle v_1, \ldots, v_t \rangle = 0$$

gilt.

(2) *Die Folge* $(v_1, \ldots, v_t)$ *ist genau denn eine Komplementärbasis von* U *in* V*, wenn erstens diese Folge linear unabhängig ist, und zweitens*

$$U \oplus \langle v_1, \ldots, v_t \rangle = V$$

gilt.

(3) *Sei* $(u_1,\ldots,u_s)$ *eine Basis von* U. *Die Folge* $(v_1,\ldots,v_t)$ *ist genau dann eine Komplementärbasis von* U *in* V, *wenn* $(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_t)$ *eine Basis von* V *ist.*

(4) *Sei* V *endlich-dimensional. Sei* U *ein Unterraum von* V. *Eine Folge von Vektoren in* V, *die linear unabhängig modulo* U *ist, lässt sich zu einer Komplementärbasis von* U *in* V *ergänzen.*

(5) *Sei* V *endlich-dimensional. Ist* $(v_1,\ldots,v_t)$ *eine Folge in* V, *die linear unabhängig modulo* U *ist, so ist*

$$t \le \dim V - \dim U.$$

Ist $(v_1,\ldots,v_t)$ *eine Komplementärbasis von* U *in* V, *so ist*

$$t = \dim V - \dim U.$$

Sind Unterräume V_i $(0 \le i \le m)$ von V gegeben und gilt

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V,$$

so nennt man dies eine *Kette* von Unterräumen.

(6) *Ist eine Kette*

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$$

von Unterräumen gegeben, und sind $(v_{i,1},\ldots,v_{i,n_i})$ *Folgen von Vektoren in* V_i, *so gilt: Ist* $(v_{i,1},\ldots,v_{i,n_i})$ *eine Komplementärbasis von* V_{i-1} *in* V_i, *für* $1 \le i \le m$, *so ist die Folge*

$$(v_{1,1},\ldots,v_{1,n_1},v_{2,1},\ldots,v_{2,n_2},\ldots,v_{m,1},\ldots,v_{m,n_m})$$

eine Basis von V *ist.*

Der Beweis von Satz 2 arbeitet mit folgender Unterraumkette:

$$0 = \operatorname{Ker}(f^0) \subseteq \operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f^2) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}(f^{r-1}) \subseteq \operatorname{Ker}(f^r) = V.$$

Wichtig ist folgendes Lemma:

Lemma. *Sei* f *nilpotenter Endomorphismus von* V, *sei* $j \ge 2$. *Sei* $(v_1,\ldots,v_s)$ *eine Folge von Elementen in* $\operatorname{Ker}(f^j)$, *die modulo* $\operatorname{Ker}(f^{j-1})$ *linear unabhängig ist. Dann ist* $(f(v_1),\ldots,f(v_s))$ *eine Folge von Elementen in* $\operatorname{Ker}(f^{j-1})$, *die modulo* $\operatorname{Ker}(f^{j-2})$ *linear unabhängig ist.*

Beweis: Jedes Element $f(v_i)$ gehört zu $\operatorname{Ker}(f^{j-1})$, denn $f^{j-1}f(v_i) = f^j(v_i) = 0$. Seien nun Elemente $\lambda_i \in K$ gegeben, so dass $\sum_i \lambda_i f(v_i)$ zu $\operatorname{Ker}(f^{j-2})$ gehört.

Dann gehört $\sum_i \lambda_i v_i$ zu $\mathrm{Ker}(f^{j-1})$, denn $f^{j-1}\big(\sum_i \lambda_i v_i\big) = f^{j-2}f\big(\sum_i \lambda_i v_i\big) = f^{j-2}\big(\sum_i \lambda_i f(v_i)\big) = 0$. Da die Folge $(v_1,\dots,v_s)$ modulo $\mathrm{Ker}\, f^{j-1}$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_i = 0$ für $1 \le i \le s$.

Wir haben oben $\lambda'_j = \dim \mathrm{Ker}(f^j) - \dim \mathrm{Ker}(f^{j-1})$ gesetzt. Aus dem Lemma folgt sofort:

Folgerung. *λ' ist eine Partition.*

Beweis: Ist $(v_1,\dots,v_s)$ eine Komplementärbasis von $\mathrm{Ker}(f^{j-1})$ in $\mathrm{Ker}(f^j)$, so ist $s = \lambda'_j$. Das Lemma besagt, dass $(f(v_1),\dots,f(v_s))$ zu $\mathrm{Ker}(f^{j-1})$ gehören, und linear unabhängig modulo $\mathrm{Ker}(f^{j-2})$ sind. Also ist $t \le \lambda'_{j-1}$.

Da λ' eine Partition ist, ist auch $\lambda = (\lambda')'$ eine Partition.

Nun beginnen wir mit dem eigentlichen Beweis von Satz 2. Wir konstruieren induktiv Komplementärbasen $(v_{1,j},\dots,v_{\lambda'_j,j})$ von $\mathrm{Ker}(f^{j-1})$ in $\mathrm{Ker}(f^j)$, und zwar in absteigender Folge, wir beginnen also mit $j = r$, dann kommt $j = r-1$, und so weiter, bis schließlich $j = 1$.

Induktionsanfang: Wähle eine beliebige Komplementärbasis $(v_{1,r},\dots,v_{\lambda'_r,r})$ von $\mathrm{Ker}(f^{r-1})$ in $\mathrm{Ker}(f^r) = V$.

Induktionsschritt: sei schon $(v_{1,j},\dots,v_{\lambda'_j,j})$ konstruiert, dies sei also eine Komplementärbasis von $\mathrm{Ker}(f^{j-1})$ in $\mathrm{Ker}(f^j)$, für ein $1 \le j \le r$. Ist $2 \le j$, so wende f an, wir erhalten eine Folge $(f(v_{1,j}),\dots,f(v_{\lambda'_j,j}))$, die nach dem Lemma in $\mathrm{Ker}(f^{j-1})$ liegt und modulo $\mathrm{Ker}(f^{j-2})$ linear unabhängig ist. Wir setzen

$$(*) \qquad v_{i,j-1} = f(v_{i,j}) \quad \text{für} \quad 1 \le i \le \lambda'_j.$$

Wir können diese Folge $(v_{1,j-1},\dots,v_{\lambda'_j,j-1})$ zu einer Komplementärbasis

$$(v_{1,j-1},\dots,v_{\lambda'_j,j-1},v_{\lambda'_j+1,j-1},\dots,v_{\lambda'_{j-1},j-1})$$

von $\mathrm{Ker}(f^{j-2})$ in $\mathrm{Ker}(f^{j-1})$ fortsetzen.

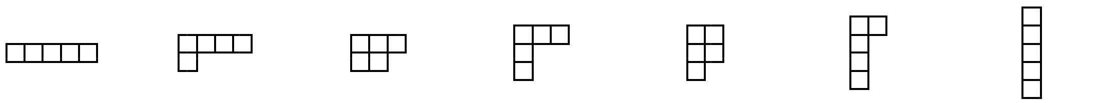
Die Elemente $v_{i,j}$ mit $1 \le i \le \lambda'_j$ und $1 \le j \le r$ bilden eine Basis von V und $(*)$ zeigt, dass die Wirkung von f auf dieser Basis genau der Wirkung von $N(\lambda)$ auf den Basiselementen $e^{(\lambda)}_{ij}$ entspricht. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Folgerung. *Sei $A \in M(n \times n, K)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(i) *A ist nilpotent.*
(ii) *A ist ähnlich zu einer Matrix der Form $N(\lambda)$, mit λ Partition von n.*
(iii) *$\chi_A = T^n$.*
(iv) *$A^n = 0$.*

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Dies wurde gerade bewiesen. (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Ist A ähnlich zu $N(\lambda)$, so ist $\chi_A = \chi_{N(\lambda)} = T^n$. (iii) $\Longrightarrow$ (iv): Dies folgt aus dem Satz von Cayley-Hamilton.

Hier alle Partitionen λ von n= 5 und die zugehörigen Young-Diagramme und die Jordanmatrizen $N(\lambda)$:

(5)	$(4,1)$	$(3,2)$	$(3,1,1)$	$(2,2,1)$	$(2,1,1,1)$	$(1,1,1,1,1)$



$$\begin{bmatrix} 0&1&&& \\ &0&1&& \\ &&0&1& \\ &&&0&1 \\ &&&&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&&& \\ &0&1&& \\ &&0&1& \\ &&&0&0 \\ &&&&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&&& \\ &0&1&& \\ &&0&0& \\ &&&0&1 \\ &&&&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&&& \\ &0&1&& \\ &&0&0& \\ &&&0&0 \\ &&&&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&&& \\ &0&0&& \\ &&0&1& \\ &&&0&0 \\ &&&&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&&& \\ &0&0&& \\ &&0&0& \\ &&&0&0 \\ &&&&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&0&&& \\ &0&0&& \\ &&0&0& \\ &&&0&0 \\ &&&&0 \end{bmatrix}$$

Sei A eine nilpotente Matrix mit Koeffizienten im Körper K. Der Beweis von Satz 2 liefert ein effektives Verfahren, um nicht nur die Partition λ zu finden, sodass A und $N(\lambda)$ ähnlich sind (wie im Zusatz formuliert), sondern auch, um eine invertierbare Matrix P angeben zu können mit $P^{-1}AP = N(\lambda)$.

Beispiel. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sei $f = f_A\colon V \to V$, mit $V = K^4$. Es ist

$$V_1 = \mathrm{Ker}(f) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle, \quad V_2 = \mathrm{Ker}(f^2) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle,$$

und $\mathrm{Ker}\, f^3 = V$. Insbesondere ist A nilpotent. Wir sehen also:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \dim \mathrm{Ker}(f) = 2, \\ \lambda_2' &= \dim \mathrm{Ker}(f^2) - \dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 2 = 1, \\ \lambda_3' &= \dim \mathrm{Ker}(f^3) - \dim \mathrm{Ker}(f^2) = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Also

$$\lambda' = (2,1,1), \quad \text{daher} \quad \lambda = (3,1).$$

Wähle $v_{13} \in V \setminus V_2$, zum Beispiel $v_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Wir berechnen

$$v_{12} = Av_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v_{11} = Av_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir ergänzen v_{11} durch einen Vektor $v_{21} \in V_1$ zu einer Basis von V_1, zum Beispiel wählen wir $v_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dann haben wir also Vektoren v_{ij} konstruiert, die in das Young-Diagramm zur Partition $\lambda = (3,1)$ passen:

v_{11}	v_{12}	v_{13}
v_{21}		

Die Matrix P habe als Spalten die Vektoren $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}$ (in dieser Reihenfolge), also

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$P^{-1}AP = N((3,1)).$$

Nach Konstruktion muss dies richtig sein (wenn wir uns nicht verrechnet haben). **Überflüssig:** Man kann dies natürlich nachträglich verifizieren; berechnet man

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so sieht man:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Verifikation kann man viel einfacher vornehmen: Statt P^{-1} zu berechnen und die beiden Multiplikationen $P^{-1} \cdot A \cdot P$ vorzunehmen, reicht es zu zeigen, dass gilt

$$AP = PN((3,1))$$

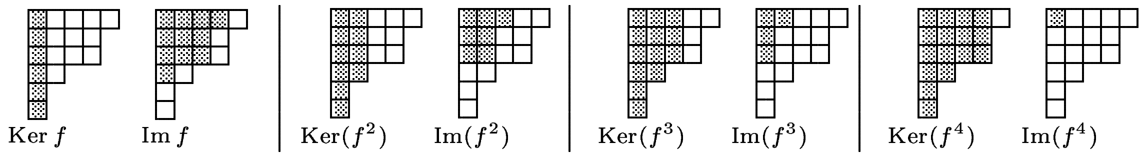
und dass P invertierbar ist. Offensichtlich entsteht $PN((3,1))$ aus P, indem einige Spalten von P nach rechts verschoben werden, und die übrigen Spalten durch Nullen ersetzt werden (genauer: die erste und die zweite Spalte werden jeweils um eine Spalte nach rechts verschoben, die neue erste und die vierte Spalte sind Nullspalten). Genau dies ist aber die Wirkung von A auf die Spalten $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}$ von P: es ist

$$Av_{11} = 0, \quad Av_{12} = v_{11}, \quad Av_{13} = v_{12}, \quad Av_{21} = 0.$$

Zusatz (ebenfalls überflüssig). Satz 1 beschreibt den Kern von f_λ^s. Im Beweis des Satzes haben wir auch das Bild von f_λ^s beschrieben:

$$\mathrm{Im}(f^s) = \langle e_{ij} \mid 1 \le i \le t,\ 1 \le j \le \lambda_i - s \rangle.$$

Hier einige Bilder dazu:



1B. Das charakteristische Polynom sei Potenz eines linearen Polynoms.

Wir betrachten nun eine Matrix A, sodass das charakteristische Polynom χ_A in Linearfaktoren zerfällt und alle diese Linearfaktoren gleich sind, also

$$\chi_A = (T - \gamma)^n$$

für ein $\gamma \in K$.

Ist $\gamma \in K$ und ist λ eine Partition von n, so setze

$$J(\gamma, \lambda) = \gamma I_n + J(\lambda),$$

Man nennt $J(\gamma, \lambda)$ eine *Jordan-Matrix zum Eigenwert* γ. Hier ein Beispiel einer Jordan-Matrix zum Eigenwert γ, und zwar zur Partition $(5, 4, 4, 2, 1, 1)$:

$$J(\gamma, (5,4,4,2,1,1)) = \left[\begin{array}{cccccc} \begin{matrix}\gamma&1&&&\\&\gamma&1&&\\&&\gamma&1&\\&&&\gamma&1\\&&&&\gamma\end{matrix} &&&&& \\ & \begin{matrix}\gamma&1&&\\&\gamma&1&\\&&\gamma&1\\&&&\gamma\end{matrix} &&&& \\ && \begin{matrix}\gamma&1&&\\&\gamma&1&\\&&\gamma&1\\&&&\gamma\end{matrix} &&& \\ &&& \begin{matrix}\gamma&1\\&\gamma\end{matrix} && \\ &&&& \gamma & \\ &&&&& \gamma \end{array}\right]$$

Ist λ eine Partition mit nur einem Teil, also $\lambda = (n)$, so spricht man von einem *Jordan-Block.* Jordan-Blöcke sind also $(n \times n)$-Matrizen der Form

$$J(\gamma, n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma E_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & & & \\ & \gamma & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma & 1 \\ & & & & \gamma \end{bmatrix}$$

Eine Jordan-Matrix $J(\gamma,\lambda)$ entsteht dadurch, dass man Jordan-Blöcke $J(\gamma,\lambda_i)$ entlang der Hauptdiagonale aneinanderreiht, und zwar geordnet nach der Größe. Verwendet man für diese Aneinandereihung entlang der Hauptdiagonalen das Symbol $\bigoplus$, so kann man für $\gamma \in K$ und $\lambda = (\lambda_, \ldots, \lambda_s)$ schreiben:

$$J(\gamma,\lambda) = \bigoplus_{i=1}^{s} J(\gamma,\lambda_i).$$

Satz. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, sei $\gamma \in K$. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $(f-\gamma\cdot 1)^e = 0$, für eine natürliche Zahl e. Dann gibt es eine Partition λ von n, so daß f bezüglich einer geeigneten Basis von V die Matrix-Darstellung $J(\gamma,\lambda)$ hat.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $f-\gamma\cdot 1$ nilpotent, wird also bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Matrix der Form $N(\lambda)$ dargestellt (dabei ist λ eine Partition). Also wird f bezüglich dieser Matrix durch $\gamma I_n + N(\lambda) = J(\gamma,\lambda)$ dargestellt.

Matrix-Formulierung. *Sei $A \in M(n\times n,K)$. Das charakteristische Polynom χ_A sei von der Form $\chi_A = (T-\gamma)^n$. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix der Form $J(\gamma,\lambda)$ für eine Partition λ.*

1C. A-invariante Unterräume, f-invariante Unterräume.

Sei $A \in M(n\times n,K)$. Ein Unterraum $U \subseteq K^n$ heißt A-*invariant,* falls gilt: Ist $u \in U$, so ist $Au \in U$. Entsprechend wird definiert: Ist $f\colon V\to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V, so heißt ein Unterraum $U \subseteq V$ f-*invariant,* falls $f(u) \in U$ für alle $u \in U$ gilt.

Ist v ein Eigenvektor von $f\colon V \to V$, so ist $\langle v\rangle$ ein f-invarianter Unterraum von V, der eindimensional ist. Auch umgekehrt gilt: Ist U ein eindimensionaler f-invarianter Unterraum von V, so ist jeder von Null verschiedene Vektor $v \in U$ ein Eigenvektor.

Wofür braucht man A-invariante Unterräume?

Offensichtlich gilt: Sei U ein A-invarianter Unterraum von K^n der Dimension m. Sei $u_1,\ldots,u_m$ eine Basis von U, setze sie durch $u_{m+1},\ldots u_n$ zu einer Basis von K^n fort. Bezüglich dieser Basis $(u_1,\ldots,u_n)$ hat f_A eine Matrizen-Darstellung der Form

$$\begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

dabei ist B eine $(m\times m)$-Matrix.

Sind A-invariante Unterräume U,V mit $U\cap V = 0$ und $U+V = K^n$ gegeben, so nennt man das Paar (U,V) eine A-*invariante Zerlegung* des K^n. Wählt man eine Basis $u_1,\ldots,u_m$ von U und eine Basis $u_{m+1},\ldots,u_n$ von V, so hat f_A bezüglich dieser Basis $(u_1,\ldots,u_n)$ eine Matrizen-Darstellung der Form

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

dabei ist B wieder eine $(m \times m)$-Matrix.

Einschub: Direkte Summen.

Seien U, W Unterräume eines Vektorraums V. Gilt $U \cap W = 0$ und $U + W = V$, so schreibt man $U \oplus W = V$ und sagt, daß V die *direkte Summe* der Unterräume U und W ist. Beachte: genau dann gilt $V = U \oplus W$, wenn sich jedes Element $v \in V$ eindeutig in der Form $v = u + w$ mit $u \in U, w \in W$ schreiben läßt.

Allgemeiner: Sind $U_1, \dots, U_s$ Unterräume eines Vektorraums V und läßt sich jedes Element $v \in V$ eindeutig in der Form $v = \sum_{i=1}^s u_i$ mit $u_i \in U_i$ schreiben, so nennt man V die *direkte Summe* der Unterräume U_i und schreibt $V = \bigoplus_{i=1}^s U_i = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$.

Lemma. *Sind $U_1, \dots, U_s$ Unterräume eines Vektorraums V. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
- $V = \bigoplus_{i=1}^s U_i$,
- *Es ist einerseits $V = \sum_{i=1}^s U_i$ und andererseits gilt $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = 0$ für alle $1 \le j \le s$.*
- *Es ist einerseits $V = \sum_{i=1}^s U_i$ und andererseits gilt $U_j \cap \sum_{i=1}^{j-1} U_i = 0$ für alle $2 \le j \le s$.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und läßt sich V als direkte Summe $V = \bigoplus_{i=1}^s U_i$ schreiben mit f-invarianten Unterräumen U_i, und wählen wir Basen der Unterräume U_{γ_i}, so erhalten wir als Vereinigung eine Basis von K^n und bezüglich dieser Basis hat f eine Matrizendarstellung der Form

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{bmatrix},$$

dabei ist A_i eine Matrizendarstellung der Einschränkung der Abbildung f auf U_i. Zur Abkürzung schreibt man $A = \bigoplus_{i=1}^s A_i$ oder auch nur $A = \bigoplus_i A_i$.

Wie findet man A-invariante Unterräume?

Lemma. *Sind $A, B \in M(n \times n, K)$ mit $AB = BA$, so ist* $\operatorname{Ker} f_B = \{v \in K^n \mid Bv = 0\}$ *ein A-invarianter Unterraum.*

Beweis: Sei $Bu = 0$. Dann ist auch $B(Au) = 0$, denn $BAu = ABu = A0 = 0$.

Wie findet man zu einer Matrix A Matrizen B mit $AB = BA$? Am einfachsten: man nimmt für B eine Matrix der Form $B = p(A)$ mit $p \in K[T]$.

Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit charakteristischem Polynom χ_A. Schreibe

$$\chi_A = p_1 \cdots p_s$$

mit paarweise teilerfremden Polynomen $p_1, \ldots, p_s$. Für jedes Polynom p_i setze

$$U(p_i) = \{v \in K^n \mid p_i(A)v = 0\} = \operatorname{Ker} f_{p_i(A)}.$$

Lemma. *Alle Unterräume $U(p_i)$ sind A-invariant und es ist $K^n = \bigoplus_{i=1}^s U(p_i)$.*

Beweis: Für jedes i schreiben wir

$$\chi_A = p_i h_i, \quad \text{dabei ist} \quad h_i = p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_s.$$

Beachte: Die Polynome $h_1, \ldots, h_s$ sind teilerfremd, also gibt es Polynome a_i mit $\sum_{i=1}^s a_i h_i = 1$. Da p_i und h_i teilerfremd sind, gibt es Polynome b_i, c_i mit $b_i p_i + c_i h_i = 1$.

(1) Wegen $A \cdot p_i(A) = p_i(A) \cdot A$ wissen wir, daß $U(p_i)$ ein A-invarianter Unterraum ist.

(2) Es ist $V = \sum U(p_i)$. Denn sei $v \in K^n$. Setze $v_i = a_i(A) h_i(A) v$. Dieser Vektor v_i gehört zu $U(p_i)$, denn

$$p_i(A) v_i = p_i(A) a_i(A) h_i(A) v = a_i(A) \chi_A(A) v = 0.$$

Wegen $\sum_{i=1}^s a_i h_i = 1$ ist $\sum v_i = v$.

(3) Für jedes i gilt $U(p_i) \cap \sum_{j \neq i} U(p_j) = 0$. Zum Beweis bemerken wir, daß $h_i(A) U(p_j) = 0$ für jedes $i \neq j$ gilt, da p_j ein Teiler von h_i ist. Daraus folgt $h_i \sum_{j \neq i} U(p_j) = 0$. Ist nun u im Durchschnitt $U(p_i) \cap \sum_{j \neq i} U(p_j) = 0$, so ist sowohl $p_i(A) u = 0$ als auch $h_i(A) u = 0$. Also ist $u = \big(b_i(A) p_i(A) + c_i(A) h_i(A)\big) u = 0$.

1D. Die Jordan'sche Normalform.

Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Sei also

$$\chi_A = (T - \gamma_1)^{n_1} \cdots (T - \gamma_s)^{n_s}$$

mit paarweise verschiedenen $\gamma_i \in K$ und mit natürlichen Zahlen $n_i \in \mathbb{N}_1$.

Wir wenden die Überlegungen des letzten Abschnitts mit $p_i = (T - \gamma_i)^{n_i}$ an. Wir betrachten also für jedes i den Unterraum

$$\operatorname{Haupt}(A, \gamma_i) = \{v \in K^n \mid (A - \gamma_i I_n)^{n_i} v = 0\},$$

man nennt ihn den *Hauptraum* zum Eigenwert γ_i.

Beachte: Man kann für jedes $\gamma \in K$ den zugehörigen Hauptraum durch

$$\operatorname{Haupt}(A, \gamma) = \{v \in K^n \mid (A - \gamma I_n)^n v = 0\},$$

definieren. Genau dann ist $\operatorname{Haupt}(A, \gamma) \neq 0$, wenn γ ein Eigenwert von A ist, und es gilt immer

$$\operatorname{Eig}(A, \gamma) \subseteq \operatorname{Haupt}(A, \gamma).$$

Wichtig ist: *Alle Unterräume* $\mathrm{Haupt}(A,\gamma_i)$ *sind* A*-invariant und es ist*

$$K^n = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Haupt}(A,\gamma_i).$$

Dies folgt unmittelbar aus 1C. Man nennt dies die *Hauptraum-Zerlegung* von V.

Wählen wir Basen der Unterräume $\mathrm{Haupt}(A,\gamma_i)$, so erhalten wir eine Basis von K^n und bezüglich dieser Basis hat A eine Matrizendarstellung der Form

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{bmatrix},$$

dabei ist A_i eine Matrizendarstellung der Einschränkung der Abbildung $u \mapsto Au$ auf $\mathrm{Haupt}(A,\gamma_i)$.

Nach Definition von $\mathrm{Haupt}(A,\gamma_i)$ ist die Einschränkung der Abbildung $u \mapsto Au$ auf $\mathrm{Haupt}(A,\gamma_i)$ eine Abbildung f_i mit $(f_i - \gamma_i \cdot 1)^{n_i} = 0$. Derartige Endomorphismen werden aber bei geeigneter Basiswahl durch Jordan-Matrizen der Form $J(\gamma_i,\lambda^{(i)})$ bechrieben.

Satz. *Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n\times n,K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es paarweise verschiedene Elemente $\gamma_1,\dots,\gamma_s \in K$ und zu jedem γ_i eine Partition $\lambda^{(i)}$, so daß A ähnlich zur Matrix $\bigoplus_i J(\gamma_i,\lambda^{(i)})$ ist.*

Ist umgekehrt A ähnlich zur Matrix $\bigoplus_{i=1}^s J(\gamma_i,\lambda^{(i)})$, wobei $\gamma_1,\dots,\gamma_s$ paarweise verschiedene Elemente aus K sind, und jedes $\lambda^{(i)}$ eine Partition von n_i ist, für $1 \le i \le s$ (mit $\sum_i n_i = n$), so sind die γ_i die Eigenwerte von A, die Vielfachheit von $T-\gamma_i$ in χ_A ist n_i, die Vielfachheit von $T-\gamma_i$ in μ_A ist $\lambda^{(i)}_1$.

Man nennt eine Matrix der Form $\bigoplus_i J(\gamma_i,\lambda^{(i)})$ eine *Jordan'sche Normalform.*

Eindeutigkeit. Vertauscht man die einzelnen Blöcke $J(\gamma_i,\lambda^{(i)})$ untereinander, so erhält man eine zur gegebenen Matrix ähnliche Matrix. Bis auf derartige Vertauschungen ist die Jordan'sche Normalform eindeutig:

Sind zwei Matrizen $\bigoplus_i J(\gamma_i,\lambda^{(i)})$ und $\bigoplus_i J(\delta_i,\nu^{(i)})$ ähnlich, so gibt es eine Permutation σ mit $\gamma_i = \delta_{\sigma(i)}$ und $\lambda^{(i)} = \nu^{(\sigma(i))}$.

Dies folgt zum Beispiel daraus, daß man zu jedem Eigenwert γ_i die zugehörige Partition $\lambda^{(i)}$ wie folgt berechnen kann:

Verfahren zur Bestimmung der Jordan'schen Normalform. Sei $\gamma = \gamma_i$ ein Eigenwert von A. Wie sieht die zugehörige Partition $\lambda = \lambda^{(i)}$ aus? Betrachte die Matrizen der Form

$$\gamma I_n - A,\ (\gamma I_n - A)^2,\ (\gamma I_n - A)^3,\ \dots$$

Sei r_i der Rang der Matrix $(\gamma I_n - A)^i$ für $i \geq 1$ und $r_0 = n$ (dies ist natürlich gerade der Rang der Matrix $(\gamma I_n - A)^0 = I_n$). *Es ist* $(r_0 - r_1, r_1 - r_2, \dots)$ *die zu* λ *duale Partition.*

Hier alle Jordan'schen Normalformen von Matrizen mit charakteristischem Polynom $(T-2)^4(T-3)^2$, unter jeder Matrix steht das Minimalpolynom:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3&1 \\ &&&&&3 \end{array}\right]$$

$$(T-2)^4(T-3)^2 \qquad (T-2)^3(T-3)^2 \qquad (T-2)^2(T-3)^2 \qquad (T-2)^2(T-3)^2 \qquad (T-2)(T-3)^2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&1&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&1&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&1&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|cc} 2&&&&& \\ &2&&&& \\ &&2&&& \\ &&&2&& \\ \hline &&&&3& \\ &&&&&3 \end{array}\right]$$

$$(T-2)^4(T-3) \qquad (T-2)^3(T-3) \qquad (T-2)^2(T-3) \qquad (T-2)^2(T-3) \qquad (T-2)(T-3)$$

Folgerung (additive Jordan-Zerlegung). *Sei* K *ein Körper. Sei* $A \in M(n \times n, K)$ *eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann läßt sich* A *als Summe* $A = A' + A''$ *einer diagonalisierbaren Matrix* A' *und einer nilpotenten Matrix* A'', *mit* $A'A'' = A''A'$ *schreiben.*

Beweis: Wir wissen, daß A zu einer Matrix der Form $B = \bigoplus_i \big(\gamma_i I_{n_i} + J(\lambda^{(i)})\big)$ ähnlich ist, es gibt also eine invertierbare Matrix S mit $A = S^{-1}BS$. Wir können $B = B' + B''$ schreiben mit $B' = \bigoplus_i \gamma_i I_{n_i}$ und $B'' = \bigoplus_i J(\lambda^{(i)})$. Die Matrix B' ist eine Diagonalmatrix, B'' ist nilpotent, und man sieht leicht, daß $B'B'' = B''B'$ gilt. Setze $A' = S^{-1}A'S$ und $A'' = S^{-1}B''S$. Dann ist A' diagonalisierbar, A'' nilpotent, und es ist

$$A'A'' = S^{-1}B'SS^{-1}B''S = S^{-1}B'B''S = S^{-1}B''B'S = A''A'.$$

Warnung: Ob ein Polynom in Linearfaktoren zerfällt oder nicht, ist davon abhängig, welchen Körper man als Grundkörper betrachtet. *Ist* f *ein Polynom, so gibt es einen endlichen Erweiterungskörper, über dem* f *in Linearfaktoren zerfällt.* (Algebra I) Jeder Körper ist einbettbar in einen "algebraisch abgeschlossenen" Körper: in ihm zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren (Algebra I). Arbeiten wir mit dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, und ist $f \in \mathbb{R}[T]$, so zerfällt f über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen in Linearfaktoren (dies ist der schon öfters erwähnte "Fundamentalsatz der Algebra").