2. Weitere Grundbegriffe: Faktorraum und Dualraum.

Wir betrachten hier zwei Konstruktionen, wie aus vorgegebenen Vektorräumen neue Vektorräume konstruiert werden. Die Faktorraum-Bildung geht davon aus, dass ein Vektorraum und ein Unterraum gegeben ist; für die Dualraum-Bildung muss überhaupt nur ein Vektorraum gegeben sein.

Gegeben ist also ein beliebiger Körper K und wir betrachten K-Vektorräume.

2A. Faktorräume.

Sei V ein Vektorraum, U ein Unterraum von V. Die Menge aller Teilmengen von V der Form $U+v$ mit $v\in V$ bezeichnet man mit V/U. Beachte:

Seien $v, v' \in V$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) *Es ist $U+v = U+v'$.*
(ii) *Es ist $v-v' \in U$*
(iii) *Es ist $(U+v)\cap(U+v') \neq \emptyset$.*

Beweis: (i) $\implies$ (iii): Da U ein Unterraum von V ist, ist U nicht leer (denn $0\in U$, also ist auch $U+v$ für jedes $v\in V$ nicht leer. Aus $U+v=U+v'$ folgt demnach $(U+v)\cap(U+v')\neq\emptyset$.

(iii) $\implies$ (ii): Sei $(U+v)\cap(U+v')\neq\emptyset$, es gibt also ein Element im Durchschnitt, etwa $u+v=u'+v'$, mit $u,u'\in U$. Dann ist aber $v-v'=u'-u\in U$.

(ii) $\implies$ (i): Setze $u=v-v'$. Wir setzen voraus $u\in U$. Als erstes zeigen wir: $U+v\subseteq U+v'$. Sei also $u_1\in U$. Es ist $u_1+v=u_1+v-v'+v'=u_1+u+v'\in U+v'$, denn $u_1+u\in U$. Analog sehen wir: $U+v'\subseteq U+v$ (ist $u_2\in U$, so ist $u_2+v'=u_1+v'-v'+v=u_1-u+v\in U+v$).

(Die Teilmengen der Form $U+v$ bilden also eine "Partition" der Menge V im Sinne der Mengenlehre – das heißt: die Vereinigung dieser Teilmengen ist ganz V und scheiden sich zwei dieser Teilmengen, so sind sie gleich). Man verwechsle nicht die beiden ganz verschiedenen Begriffe "Partition" — bei den "Partitionen" im Sinne der Mengenlehre handelt es sich um eine Menge von Mengen; bei den zahlentheoretischen "Partitionen", die wir für die Jordan'sche Normalform gebraucht haben, hanelt es sich um eine endliche Folge natürlicher Zahlen!)

Man nennt $U+v$ eine *Nebenklasse* von U in V, und v einen Repräsentanten dieser Nebenklassen: *Die Repräsentanten der Nebenklasse $U+v$ sind gerade die Elemente von $U+v$.*

Beweis: Wegen $v=0+v$ gehört v zu $U+v$. Ist umgekehrt ein Element von $U+v$ gegeben, etwa $u+v$ mit $u\in U$, so ist $U+v=U+(u+v)$, also ist $u+v$ ein Repräsentant. der Nebenklasse $U+v$.

Wir sehen also: Eine Nebenklasse hat üblicherweise viele Repräsentanten, eben alle ihre Elemente. Nur im uninteressanten Fall $U=\{0\}$ sind die Nebenklassen einelementig (es ist $\{0\}+v=\{v\}$ für jedes $v\in V$.

(Manchmal nennt man $U+v$ die "Restklasse" von v modulo U. Ganz allgemein nennt man die Teilmengen $M \subseteq V$ der Form $M = U+v$, wobei U ein Unterraum von V und v ein Element von V ist, die nicht-leeren *affinen Teilräume* von V. (Warnung: Manchmal spricht man auch von "affinen Unterräumen"; dies kann aber irreführend sein, denn affine Teilräume sind fast ausnahmslos **keine** Unterräume).

Weiter unten werden wir uns mit der Menge aller affinen Teilräume eines Vektorraums beschäftigen, in diesem Abschnitt betrachten wir nur diejenigen affinen Teilräume $v+U$, bei denen U ein festgewählter Unterraum ist.

Die Vektorraum-Struktur von V/U. Es gilt: *V/U ist ein Vektorraum vermöge der folgenden Operationen:*

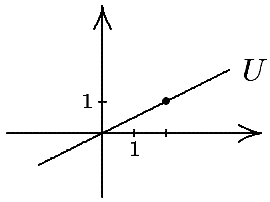
$$(*) \qquad (U+v)+(U+w) = U+(v+w)$$

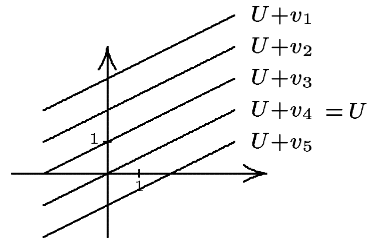
$$(**) \qquad c(U+v) = U+cv$$

für $v, w \in V$ und $c \in K$, man nennt ihn den *Faktorraum von V modulo U* (manche Bücher sprechen auch vom "Quotientenraum"). Hier ist zu zeigen, dass dies "wohldefiniert" ist, und dass dann die Vektorraum-Axiome gelten. Beides ist einfach, doch macht der Beweis der Wohldefiniertheit einem Anfänger oft Kopfzerbrechen! Schaut man sich $(*)$ genauer an, so sieht man folgendes: Man beginnt links mit den affinen Teilräumen $U+v$, $U+w$ und will $(U+v)+(U+w)$ definieren. Nun lässt sich aber $U+v$ (falls $\dim U \geq 1$) auch in der Form $U+v'$ schreiben, wobei $v' \neq v$ ist (es muss ja nur $v' = v+u$ für ein $u \in U$ gelten). Entsprechend hat man $U+w = U+w'$ für verschiedene w'. Zu untersuchen ist also, ob aus $U+v = U+v'$ und $U+w = U+w'$ folgt, dass $U+(v+w) = U+(v'+w')$ gilt. Wäre dies nicht der Fall, so wäre die rechte Seite von $(*)$ durch die linke Seite gar nicht eindeutig bestimmt, die vorgeschlagene Addition wäre also nicht "wohldefiniert". Hier allerdings gibt es keine Probleme: Ist $U+v = U+v'$, so ist $v-v' \in U$. Ist $U+w = U+w'$, so ist $w-w' \in U$. Dann ist aber $(v+w)-(v'+w') = (v-v')+(w-w') \in U$, denn U ist abgeschlossen unter $+$, also ist $U+(v+w) = U+(v'+w')$. Entsprechend zeigt man, dass auch die Skalarmultiplikation auf V/U wohldefiniert ist. *Das Null-Element des Vektorraums V/U ist natürlich gerade U selbst.*

Das folgende Beispiel zeigt links einen eindimensionalen Unterraum U von $V = \mathbb{R}^2$, nämlich die Vielfachen des Vektors $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, rechts daneben sieht man einige affine Teilräume der Form $U+v_i$ mit $v_i \in \mathbb{R}^2$, dabei ist $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (natürlich kann jedes $U+v_i$ auch in ganz anderer Form geschrieben werden – es ist $U+v_1 = U+\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = U+\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \dots$). Alle diese Geraden $U+v_i$ sind Elemente von V/U; insgesamt ist V/U gerade die Menge aller zu U parallelen Geraden (einschließlich U selbst). Um ein Beispiel für die Addition auf der Menge V/U vor Augen zu haben: es ist

$(U + v_2) + (U + v_3) = U + v_1$.





Die kanonische Projektion $V \to V/U$**.** *Die Zuordung* $v \mapsto \pi_U(v) = U + v$ *für* $v \in V$ *liefert einen surjektiven Vektorraum-Homomorphismus*

$$\pi_U \colon V \longrightarrow V/U$$

und der Kern von π_U *ist gerade* U (meist schreibt man für $v \in V$ statt $\pi_U(v)$ einfach $\overline{v}$).

Beweis: Dass die Zuordnung additiv ist, steht gerade in der Gleichung $(*)$, dass sie mit Skalaren vertauscht, in der Gleichung $(**)$. Dass der Kern gerade U ist sieht man unmittelbar.

Folgerung (Dimensionsformel für Faktorräume). *Ist* V *ein endlich-dimensionaler Vektorraum und* U *ein Unterraum, so ist*

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Dies ist eine unmittelbare Folgerung der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, angewandt auf die Abbildung π_U. Sie besagt $\dim \mathrm{Bild}(\pi_U) = \dim V - \dim \mathrm{Kern}(\pi_U)$. Aber $\mathrm{Bild}(\pi_U) = V/U$ und $\mathrm{Kern}(\pi_U) = U$.

Sei U ein Unterraum von V. Seien $v_1, \dots, v_t$ Elemente von V.

(a) *Ist* $U + \langle v_1, \dots, v_t \rangle = V$, *so ist* $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_t$ *ein Erzeugendensystem von* V/U.

(b) *Ist die Folge* $(\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n)$ *linear unabhängig in* V/U, *so ist die Folge* $(v_1, \dots, v_n)$ *linear unabhängig in* V.

(c) *Genau dann ist* $v_1, \dots, v_t$ *eine Komplementärbasis von* U *in* V, *wenn* $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_t$ *eine Basis von* V/U *ist.*

Lemma. *Sei* $V = U \oplus U'$. *Dann ist die Hintereinanderschaltung der Inklusion* $U' \subseteq V$ *und der Projektion* $\pi_U \colon V \to V/U$ *ein Isomorphismus* $U' \to V/U$.

Beweis: Die Hintereinanderschaltung bildet $u' \in U'$ auf $U + u'$ ab. Sie ist injektiv, denn ist $U + u' = \overline{0} = U$, so ist $u' \in U$, aber $U \cap U' = 0$, also $u' = 0$. Die Hintereinanderschaltung ist surjektiv: Ist $U + v$ mit $v \in V$ ein beliebiges Element aus V/U, so schreiben wir $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$. Es ist $\pi_U(u') = U + u' = U + u + u' = U + v$.

Die "universelle Eigenschaft" der Abbildung π_U. *Die lineare Abbildung π_U hat die Eigenschaft $\pi_U(U) = 0$, und jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(U) = 0$ lässt sich eindeutig durch π_U faktorisieren.* Das heißt: es gibt zu f eine und nur eine lineare Abbildung $f'\colon V/U \to W$ mit $f = f'\pi_U$. Statt die Gleichung $f = f'\pi_U$ hinzuschreiben, wird oft das folgende "kommutative Dreieck" notiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi_u"] \arrow[dr, "f"'] & V/U \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Beweis: Die erste Aussage wurde oben schon notiert: Es gilt nicht nur $U \subseteq \operatorname{Kern}(\pi_U)$, sondern sogar $U = \operatorname{Kern}(\pi_U)$. Um die zweite Aussage zu zeigen, betrachten wir eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(U) = 0$. Wir wollen $f'\colon V/U \to W$ durch $f'(v+U) = f(v)$ definieren. Wir müssen zeigen, dass dies **wohl-definiert** ist, dass also für $v, v' \in V$ mit $v+U = v'+U$ gilt $f(v) = f(v')$. Dies folgt aber aus der Voraussetzung $f(U) = 0$. Ferner ist zu zeigen, dass f' linear ist .... Und endlich ist zu zeigen, dass f' eindeutig bestimmt ist ....

Sind V, W Vektorräume und ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so erhält man einen Isomorphismus $\overline{f}\colon V/\operatorname{Kern}(f) \longrightarrow \operatorname{Bild}(f)$ durch $\overline{f}(\overline{v}) = f(v)$.

Beweis: Hier ist wieder als erstes zu zeigen, dass die Abbildung $\overline{f}$ "wohldefiniert" ist: Ist $\operatorname{Kern}(f) + v = \operatorname{Kern}(f) + v'$, so ist $v - v' \in \operatorname{Kern}(f)$, also ist $f(v) = f(v')$. Dass die so definierte Abbildung linear ist, rechnet man sofort nach. (Man kann aber die Existenz von $\overline{f}$ auch direkt aus der universellen Eigenschaft von $\pi_{\operatorname{Kern}(f)}$ ableiten: Wegen $f(\operatorname{Kern}(f)) = 0$ existiert eine und nur eine lineare Abbildung $\overline{f}\colon V/\operatorname{Kern}(f) \to W$ mit $f = \overline{f}\pi_{\operatorname{Kern}(f)}$; betrachten wir f als Abbildung $f\colon V \to \operatorname{Bild}(f)$, so erhalten wir entsprechend $\overline{f}\colon V/\operatorname{Kern}(f) \to \operatorname{Bild}(f)$). Man sieht unmittelbar, dass $\overline{f}\colon V \to \operatorname{Bild}(f)$ surjektiv ist.

Injektivität: Ist $\overline{f}(\overline{v}) = 0$, so ist $f(v) = 0$, also ist $v \in \operatorname{Kern}(f)$ und demnach ist $\overline{v} = \operatorname{Kern}(f) + v = \operatorname{Kern}(f)$ das Null-Element von $V/\operatorname{Kern}(f)$.

Ist $f\colon V \to W$ linear, so definiert man den Cokern von f durch $\operatorname{Cokern}(f) = W/\operatorname{Bild}(f)$. Offensichtlich gilt: *Genau dann ist f surjektiv, wenn* $\operatorname{Cokern}(f) = 0$ *gilt.* Diese Aussage entspricht der bekannten Formulierung: Genau dann ist f injektiv, wenn $\operatorname{Kern}(f) = 0$ gilt.

Funktorialität. *Seien V, W Vektorräume, sei V' Unterraum von V, sei W' Unterraum von W. Sei $f\colon V \to W$ lineare Abbildung mit $f(V') \subseteq W'$. Dann wird durch $f''(v+V') = f(v) + W'$ eine lineare Abbildung $f''\colon V/V' \to W/W'$ definiert, sodass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & V \arrow[r] \arrow[d, "f"] & V/V' \arrow[d, "f''"] \\ W' \arrow[r] & W \arrow[r] & W/W' \end{tikzcd}$$

dabei sind die horizontalen Abbildungen die kanonischen Abbildungen (Inklusion, Projektion) und $f'\colon V' \to W'$ ist die Einschränkung von f auf V'.

Beweis: Wir definieren f'' durch $f''(v+V') = f(v) + W'$ für $v \in V$. Wieder ist zu zeigen, dass f'' wohldefiniert ist. Natürlich ist ein so definiertes f'' linear und das rechte Quadrat ist kommutativ (das linke sowieso). Die Existenz von f'' folgt aber auch unmittelbar aus der universellen Eigenschaft von $\pi_{V'}$.

Matrizen-Version: Seien V, W endlich-dimensional. Nimm eine Basis von V' und setze sie fort zu einer Basis von V. Nimm eine Basis von W' und setze sie fort zu einer Basis von W. Dann wird f durch eine Matrix der Form $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ beschrieben, dabei ist A Matrizendarstellung von f' (und zwar bezüglich der gegebenen Basen von V' und W', und C ist Matrizendarstellung von f'' (bezüglich der Basen von V/V' und W/W', die man durch die gegebenen Komplementärbasen von V' ind V bzw. von W' in W erhält).

Ausblick. Eine derartige lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(V') \subseteq W'$ liefert nicht nur die beiden Abbildungen f' und f'', sondern zusätzlich auch noch eine Abbildung $\delta\colon \operatorname{Kern}(f'') \to \operatorname{Cokern}(f')$, siehe Übungsaufgabe 3.4. Insgesamt erhält man ein großes Diagramm, wobei alle Quadrate kommutativ sind:

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern}(f') \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Kern}(f) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Kern}(f'') \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] \\
V' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & V \arrow[r] \arrow[d, "f"] & V/V' \arrow[d, "f''"] \\
W' \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & W/W' \arrow[d] \\
\operatorname{Cokern}(f') \arrow[r] & \operatorname{Cokern}(f) \arrow[r] & \operatorname{Cokern}(f'')
\end{tikzcd}
$$

die horizontalen Abbildungen links sind Inklusionsabbildungen, oder aber (die unterteste) durch eine Inklusionsabbildung induziert; die horizontalen Abbildungen rechts sind Projektionsabbildungen oder aber (unten und oben) durch Projektionsabbildungen induziert. Von besonderem Interesse ist die Folge der in diesem Diagramm enthaltenen Abbildungen

$$\operatorname{Kern}(f') \to \operatorname{Kern}(f) \to \operatorname{Kern}(f'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{Cokern}(f') \to \operatorname{Cokern}(f) \to \operatorname{Cokern}(f''),$$

diese Folge spielt in der "homologischen Algebra" eine Rolle. Mehr soll hier nicht verraten werden!

Homologie. Seien V_0, V_1, V_2 Vektorräume und $f_0\colon V_0 \to V_1$, $f_1\colon V_1 \to V_2$ lineare Abbildungen. Ist $f_1 \circ f_0 = 0$, so ist $\operatorname{Im}(f_0) \subseteq \operatorname{Kern}(f_1)$ und man kann den

Faktorraum $\mathrm{Kern}(f_1)/\mathrm{Im}(f_0)$ bilden, man nennt ihn die *Homologie* der Folge

$$V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2.$$

Dies ist eine ganz wichtige Konstruktion in vielen Teilgebieten der Mathematik (zum Beispiel in der Algebra, in der Topologie und in der algebraischen Geometrie).

2B. Ein wenig "affine Geometrie".

Erinnerung: Eine Teilmenge M des Vektorraums V heißt *affiner Teilraum* falls M entweder leer oder von der Form $M = v + U$ ist, wobei U ein Unterraum von V und v ein Element von V ist. (Warnung: In manchen Büchern werden nur nicht-leere affine Teilräume betrachtet!)

(1) *Seien U, U' Unterräume, v, v' Vektoren. Es ist $U+v = U'+v'$ genau dann, wenn gilt: $U = U'$ und $v - v' \in U$.*

(Insbesondere gilt: *der Unterraum U ist durch $U + v$ eindeutig bestimmt,* nicht jedoch der Vektor v - dieser kann durch einen beliebigen Vektor in $U + v$ ersetzt werden! Anders formuliert: Ist $M \subseteq V$ ein affiner Teilraum und $a \in M$, so liefert die Verschiebung von M um $-a$ einen Unterraum U und es ist $M = U + a$. Man kann den Unterraum U der zu $M = U + v$ gehört, auch folgendermaßen charakterisieren: *Ist $M = U + v$ ein affiner Teilraum, so ist $U = \{v_1 - v_2 \mid v_1, v_2 \in M\}$.* Unterräume werden manchmal zur Unterscheidung von den allgemeineren affinen Teilräumen auch *lineare Unterräume* genannt.

Ist U ein Unterraum und $v \in V$, so ist ja U durch $U + v$ eindeutig bestimmt und man nennt $\dim U$ die *Dimension* des affinen Teilraums $U + v$. Für einige Dimensionen d verwendet man folgende Bezeichnungen (dabei sei $\dim V = n$)

d	**Bezeichnung**
-1	leere Menge
0	Punkt
1	Gerade
2	Ebene
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	Hyperebene

(1) *Die affinen Teilräume von K^n sind gerade die Lösungsmengen der linearen Gleichungssystem in n Variablen mit Koeffizienten in K.*

(2) *Sind $v_1 \neq v_2$ Punkte in V, so gibt es genau eine Gerade G, die die beiden Punkte enthält* (und zwar $G = v_1 + K(v_2 - v_1)$).

(3) Charakterisierung. *Die Charakteristik des Grundkörpers K sei ungleich 2. Dann gilt: Eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann ein affiner Teilraum, wenn M mit je zwei Punkten $a_1 \neq a_2$ auch die durch a_1 und a_2 gehende Gerade enthält.*

(4) *Der Durchschnitt zweier affiner Teilräume $U+v$ und $U'+v'$ ist wieder ein affiner Teilraum*; ist der Durchschnitt nicht leer, so ist

$$(U+v)\cap(U'+v)=(U\cap U')+w,$$

dabei ist w ein beliebiger Vektor im Durchschnitt.

2C. $\mathrm{Abb}(S,W)$ und Unterräume.

Sei K ein Körper, W ein K-Vektorraum. Sei S eine Menge. Es sei daran erinenrt, dass wir mit $\mathrm{Abb}(S,W)$ die Menge aller Abbildungen $S\to W$ bezeichnen. Diese Menge trägt eine "kanonische" Vektorraum-Struktur, nämlich vermöge punktweiser Addition und punktweise Skalar-Multiplikation: Sind $f,g\in\mathrm{Abb}(S,W)$ und ist $c\in K$, so sind $f+g$ und cf auf folgende Weise definiert: für $s\in S$ setzt man

$$\begin{aligned}(f+g)(s)&=f(s)+g(s)\\ (cf)(s)&=c\cdot f(s).\end{aligned}$$

(Zu zeigen ist, dass die Vektorraum-Axiome erfüllt sind, dass also zum Beispiel das Assoziativ-Gesetz für die Addition gilt: $(f+g)+h=f+(g+h)$ für $f,g,h\in\mathrm{Abb}(S,W)$. Da $(f+g)+h, f+(g+h)$ Abbildungen sind, zeigt man die Gleichheit dadurch, dass man zeigt: für jedes $s\in S$ gilt $((f+g)+h)(s)=(f+(g+h))(s)$, und dies zeigt man durch:

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(s)&=(f+g)(s)+h(s)=(f(s)+g(s))+h(s)\\ &=f(s)+(g(s)+h(s))\\ &=f(s)+(g+h)(s)=(f+(g+h))(s)\end{aligned}$$

das erste, zweite, vierte und fünfte Gleichheitszeichen beruht auf der hier eingeführten Definition der Addition von Abbildungen, das dritte Gleichheitszeichen ist die Assoziativität der Addition in W. Und so weiter und so weiter. Betont werden sollte, dass das Nullelement von $\mathrm{Abb}(S,W)$ die Nullabbildung $n\colon S\to W$ mit $n(s)=0$ für alle $s\in S$ ist - statt n schreibt man wie üblich einfach 0.)

Satz. *Ist S endliche Menge und W endlich-dimensionaler Vektorraum, so ist auch $\mathrm{Abb}(S,W)$ endlich-dimensional und es gilt*

$$\boxed{\dim\mathrm{Abb}(S,W)=|S|\cdot\dim W}$$

Ist $f\colon S\to K$ eine Abbildung, so nennt man $\{s\in S\mid f(s)\neq 0\}$ den Träger von f. Mit $\mathrm{Abb}_0(S,K)$ (oder auch einfach mit $K[S]$) bezeichnen wir den Unterraum aller Abbildungen $f\colon S\to K$ mit endlichem Träger. (Man verifiziert problemlos, dass dies wirklich ein Unterraum ist!) Definiert man für $s \in S$ die Abbildung $\delta_s\colon S \to K$ durch $\delta_s(s') = 0$ für $s' \neq s$ und $\delta_s(s) = 1$, so gilt: *die Menge* $\{\delta_s \mid s \in S\}$ *ist eine Basis von* $\mathrm{Abb}_0(S,K)$.

Ist V ein Vektorraum und ist eine Familie von Vektoren $v_s \in V$, $(s \in S)$, gegeben, so wird durch $\delta_s \mapsto v_s$ eine lineare Abbildung $\epsilon\colon \mathrm{Abb}_0(S,K) \to V$ definiert. Der Faktorisierungsatz für lineare Abbildung besagt dann, dass ϵ eine injektive Abbildung

$$\overline{\epsilon}\colon \mathrm{Abb}_0(S,K)/\operatorname{Kern}(\epsilon) \to V$$

induziert. Ist die Menge v_s $(s \in S)$ ein Erzeugendensystem, so ist ϵ (und daher auch $\overline{\epsilon}$ surjektiv. Wir sehen also: V ist in diesem Fall isomorph zum Vektorraum $\mathrm{Abb}_0(S,K)/\operatorname{Kern}(\epsilon)$. Ist v_s $(s \in S)$ eine Basis, so ist $\operatorname{Kern}(\epsilon) = 0$, demnach ist V (unter ϵ) zu $\mathrm{Abb}_0(S,K)$ isomorph.

Sind V, W K-Vektorräume, so haben wir mit $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ (oder auch einfach mit $\mathrm{Hom}(V,W)$) die Menge aller K-linearen Abbildungen $V \to W$ bezeichnet — dies ist natürlich eine Untermenge von $\mathrm{Abb}(V,W)$ und es gilt: $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ *ist ein Unterraum von* $\mathrm{Abb}(V,W)$ (denn sind $f, g \in Hom(V,W)$ und $c \in K$, so sind auch die Abbildungen $f+g$ und cf linear). Sind also $f, g\colon V \to W$ Elemente von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ (also lineare Abbildungen), so ist die Abbildung $f+g$ durch $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ definiert; entsprechend ist cf für $c \in K$ durch $(cf)(v) = c \cdot f(v)$ definiert.

Betrachten wir den Spezialfall $V = K^n, W = K^m$, so sieht man: *Die Zuordnung* $C \mapsto f_C$ *für* $C \in M(m \times n, K)$ *liefert einen Vektorraum-Isomorphismus*

$$M(m \times n, K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$$

(denn man rechnet sofort nach, dass gilt: $f_{A+B} = f_A + f_B$ und $f_{cA} = cf_C$, für $A, B, C \in M(m \times n, K)$ und $c \in K$). Dass die Zuordnung $C \mapsto f_C$ bijektiv ist, haben wir vor Urzeiten verifiziert; neu für uns ist, dass die Zuordnung auch linear ist.

Ganz allgemein gilt: *Sind V, W endlich-dimensional, so ist*

$$\boxed{\dim \mathrm{Hom}_K(V,W) = \dim V \cdot \dim W.}$$

Genauer wissen wir folgendes: *Ist* $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* V *und* $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ *eine Basis von* W, *so definieren wir* $\phi_{ij} \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ *für* $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ *durch*

$$\phi_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_i & \textit{für} \quad j = k \\ 0 & \textit{für} \quad j \neq k \end{cases}.$$

Dann gilt: Die Elemente ϕ_{ij} *bilden eine* K*-Basis von* $\mathrm{Hom}_K(V,W)$. Vermöge der Basis $\mathcal{V}$ können wir V mit K^n, vermöge der Basis $\mathcal{W}$ können wir W mit K^m identifizieren, wir erhalten demnach einen Vektorraum-Isomorphismus

$$M(m \times n, K) \to \mathrm{Hom}_K(V,W),$$

dabei wird der Matrix $C = (c_{ij})_{ij}$ die lineare Abbildung f mit $f(v_j) = \sum_i c_{ij} w_i$ zugeordnet. Insbesondere wird der Matrix E_{ij} (mit einer 1 an der Position (i,j) und Nullen sonst) die gerade definierte lineare Abbildung ϕ_{ij} zugeordnet. Und natürlich bilden die Matrizen E_{ij} mit $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ eine Basis von $M(m \times n, K)$. Die umgekehrte Zuordnung haben wir mit $M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ bezeichnet. Wir sehen also: *Die Zuordnung*

$$M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \colon \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow M(m \times n, K)$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

2D. Dualraum.

Wir haben gerade gesehen: Sind V, W Vektorräume, so ist auch $\operatorname{Hom}(V, W)$ ein Vektorraum. Wir betrachten jetzt den Spezialfall $W = K$. Sei also V ein K-Vektorraum. Man setzt

$$V^* = \operatorname{Hom}(V, K) = \{f \colon V \to K \mid \quad f \quad \text{linear} \quad \}$$

Dies ist wieder ein K-Vektorraum, man nennt ihn den *Dualraum* von V (die Elemente des Dualraums nennt man auch *Linearformen* auf V). Ist V endlich-dimensional, so ist $\dim V^* = \dim V$ (wegen obiger Dimensionsformel).

Duale Basen. Ist $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so bildet man Linearformen $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ mit

$$\phi_i(v_j) = \delta_{ij},$$

dabei ist $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$, und Null sonst (man nennt δ_{ij} das *Kronecker-Delta*). Es gilt:

- Ist $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$, so ist $\phi_i(v) = \lambda_i$.
- Man kann dies auch so formulieren: Für jedes $v \in V$ ist

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^n \phi_i(v) v_i.}$$

- Die Linearformen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sind linear unabhängig (denn ist $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i = 0$ mit $c_i \in K$, und so wende diese Linearform auf v_j an: $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i$ angewandt auf v_j liefert c_j, die Nullabbildung angewandt auf v_j liefert Null, also $c_j = 0$.)
- Für jedes $\phi \in V^*$ gilt:

$$\boxed{\phi = \sum_{i=1}^n \phi(v_i) \phi_i.}$$

- Also gilt: Linearformen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ erzeugen V^*.
- Insgesamt sehen wir: *Die Folge* $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ *ist eine Basis von* V^*, man nennt sie *die zu* $\mathcal{V}$ *duale Basis.*

Der **Bidualraum** V^{**}**.** Da V^* ebenfalls ein K-Vektorraum ist, können wir auch den Dualraum V^{**} von V^* bilden, also die Menge der Linearformen auf V^*. Man nennt V^{**} den *Bidualraum* von V. Es gibt eine kanonische Abbildung

$$\iota \colon V \to V^{**} \quad \text{definiert durch} \quad \iota(v)(f) = f(v) \quad \text{für} \quad v \in V, f \in V^*.$$

Diese Abbildung ist injektiv, denn sind zwei Vektoren $v_1 \neq v_2$ in V gegeben, so gibt es eine Linearform f mit $f(v_1) \neq f(v_2)$. Ist V endlich-dimensional, so ist ι auch surjektiv, denn dann ist $\dim V = \dim V^{**}$. (Ist V nicht endlich-dimensional, so ist ι **nicht** surjektiv.)

Also: *Ist V endlich-dimensionaler Vektorraum, so ist die kanonische Abbildung $V \to V^{**}$ ein Vektorraum-Isomorphismus.* Die Surjektivität bedeutet: Zu jeder Linearform $\epsilon\colon V^* \to K$ gibt es ein $v \in V$ mit $\epsilon(\phi) = \phi(v)$ für jedes $\phi \in V^*$ — *jede Linearform auf dem Dualraum ist eine "Auswertungsabbildung".*

Folgerung. *Ist V endlich-dimensional, so gilt: Jede Basis von V^* ist die duale Basis zu einer Basis von V.*

Beweis: Sei $\phi_1, \dots, \phi_n$ eine Basis von V^*. Sei $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ die duale Basis in V^{**}. Zu ϵ_i gibt es $v_i \in V$ mit $\epsilon_i(\phi) = \phi(v_i)$ für alle $\phi \in V^*$. Es ist

$$\phi_j(v_i) = \epsilon_i(\phi_j) = \delta_{ij},$$

also ist $\phi_1, \dots, \phi_n$ die duale Basis vu $v_1, \dots, v_n$.

Annullatoren. Ist M eine Teilmenge von V, so setzt man

$$M^\circ = \{f \in V^* \mid f(v) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in M\}.$$

und nennt dies den *Annullator* von M. Ist Φ eine Teilmenge von V^*, so setzt man

$$\Phi^\circ = \{v \in V \mid f(v) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \Phi\},$$

und nennt dies den *Annullator* von Φ.

Wir werden einige ganz elementare Eigenschaften der Annulatorbildung thematisieren. Dabei werden wir sehen, dass es immer **zwei** sich entsprechende Aussagen gibt, eine bezieht sich auf V, die andere auf V^*. Wir beginnen mit folgenden Eigenschaften, dabei seien $M, M_1, M_2 \subseteq V$, und $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \subseteq V^*$.

(0) Es ist $M^\circ = \langle M \rangle^\circ$ und $\Phi^\circ = \langle \Phi \rangle^\circ$.

(1) *M° ist ein Unterraum von V^*, und Φ° ist ein Unterraum von V.* (Beweis: Man verwendet einerseits die Linearität der Elemente aus V^*, und andererseits, wie Addition und Skalarmultiplikation auf V^* definiert sind.)

(2) *Es gilt:*

$$\boxed{M_1 \subseteq M_2 \implies M_1^\circ \supseteq M_2^\circ. \text{ Und entsprechend } \Phi_1 \subseteq \Phi_2, \implies \Phi_1^\circ \supseteq \Phi_2^\circ.}$$

(**Achtung:** Beachte, dass sich das Inklusionszeichen jeweils umgedreht hat! Der Beweis allerdings ist völlig trivial.)

(3) *Es ist*

$$\boxed{M \subseteq M^{\circ\circ} \text{ und } \Phi \subseteq \Phi^{\circ\circ}.}$$

(Beides ist völlig trivial: Ist $v \in M$, und $\phi \in M^\circ$, so gilt $\phi(v) = 0$ und es ist dies, was zu zeigen ist.)

Weiter unten folgen weitere derartige elementare Eigenschaften. Zuerst soll aber (3) im Fall eines endlich-dimensionalen Vektorraums V verschärfen; dazu brauchen wir:

Satz. *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.*

(4) *Sei U ein Unterraum von V. Sei $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von U. Wir setzen dies fort durch $v_{r+1}, \dots, v_n$ zu einer Basis von V und bilden die duale Basis $\phi_1, \dots, \phi_n$ zur Basis $v_1, \dots, v_n$. Dann ist $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ eine Basis von U°.*

(4*) *Sei Ψ ein Unterraum von V^*. Sei $\phi_1, \dots, \phi_s$ eine Basis von Ψ. Wir setzen dies fort durch $\phi_{s+1}, \dots, \phi_n$ zu einer Basis von V^*. Sei $\phi_1, \dots, \phi_n$ die duale Basis zur Basis $v_1, \dots, v_n$. Dann ist $v_{s+1}, \dots, v_n$ eine Basis von Ψ°.*

Beweis von (4): Es ist $\phi_i(v_j) = 0$ für $r < i \leq n$ und $1 \leq j \leq r$, also ist $\langle \phi_{r+1}, \dots, \phi_n) \rangle \subseteq U^\circ$. Umgekehrt, sei $\phi \in U^\circ$. Schreibe $\phi = \sum_i c_i \phi_i$ und wende dies auf v_j mit $1 \leq j \leq r$ an. Es ist $0 = \phi(v_j) = (\sum_i c_i \phi_i)(v_j) = c_j$. Also ist ϕ eine Linearkombination von $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$.

Beweis von (4*): Entsprechend.

Folgerung 1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, Sei U ein Unterraum von V, sei Ψ ein Unterraum von V^*. Dann gilt:

$$\boxed{\dim U + \dim U^\circ = \dim V \quad \text{und} \quad \dim \Phi + \dim \Phi^\circ = \dim V.}$$

Folgerung 2. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei U ein Unterraum von V, sei Φ ein Unterraum von V^*. Es ist*

$$\boxed{U^{\circ\circ} = U, \quad \text{und} \quad \Phi^{\circ\circ} = \Phi.}$$

Zum Beweis verwendet man (3) und die Tatsache, dass $\dim U = \dim U^{\circ\circ}$ gilt; letzteres folgt aus den beiden Formeln

$$\begin{aligned} \dim U + \dim U^\circ &= \dim V = n \\ \dim U^\circ + \dim U^{\circ\circ} &= \dim V^* = n. \end{aligned}$$

Folgerung 3. Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum. Für Teilmengen $M \subseteq V$ und $\Phi \subseteq V^*$ gilt:

$$\boxed{M^{\circ\circ} = \langle M \rangle, \quad \text{und} \quad \Phi^{\circ\circ} = \langle \Phi \rangle.}$$

Hier nun weitere elementare Eigenschaften der Annulator-Bildungen, die nur auf den Definitionen beruhen. Wieder seien $M, M_1, M_2 \subseteq V$, und $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \subseteq V^*$.

(4) *Es ist*

$$\boxed{(M_1 \cup M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ. \quad \text{und} \quad (\Phi_1 \cup \Phi_2)^\circ = \Phi_1^\circ \cap \Phi_2^\circ.}$$

(Beweis. Auch dies ist völlig trivial!)

(4′) *Seien M_1, M_2 Unterräume von V, seien Φ_1, Φ_2 Unterräume von V^*. Dann gilt:*

$$\boxed{(M_1 + M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ \quad \text{und} \quad (\Phi_1 + \Phi_2)^\circ = \Phi_1^\circ \cap \Phi_2^\circ.}$$

(Beweis: Dies folgt unmittelbar aus (1) und (4). Dabei braucht man von den Unterraum-Eigenschaften nur, dass die genannten Mengen die Null enthalten.)

Folgerung 4 des Satzes. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Es seien U_1, U_2 Unterräume von V und Φ_1, Φ_2 Unterräume von V^*. Dann gilt*
(5)

$$\boxed{(U_1 \cap U_2)^\circ = \ U_1^\circ + U_2^\circ, \qquad (\Phi_1 \cap \Phi_2)^\circ = \ \Phi_1^\circ + \Phi_2^\circ.}$$

Achtung: Diese Aussage (5) ist formal ähnlich zur Gleichung (4′). Während aber bei (4′) beide Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ ganz offensichtlich sind, ist hier zwar die Inklusion $(U_1 \cap U_2)^\circ \subseteq U_1^\circ + U_2^\circ$ offensichtlich, nicht jedoch die umgekehrte Inklusion.

Beweis der ersten Gleichheit in (5), die zweite zeigt man analog:

$$(U_1 \cap U_2)^\circ = \ (U_1^{\circ\circ} \cap U_2^{\circ\circ})^\circ = \ (U_1^\circ + U_2^\circ)^{\circ\circ} = \ U_1^\circ + U_2^\circ.$$

Das erste und das letzte Gleichheitszeichen stammt aus der Folgerung 2, das mittlere ist (4′).

Aus (5) folgt unmittelbar:
(6)

$$\boxed{U_1 \cap U_2 = (U_1^\circ + U_2^\circ)^\circ, \qquad \Phi_1 \cap \Phi_2 = (\Phi_1^\circ + \Phi_2^\circ)^\circ.}$$

Die Gleichungen (6) folgen aus (5), wenn man $(-)^\circ$ anwendet.

Bemerkung. Üblicherweise identifizieren wir den K^n mit dem Vektorraum $M(n \times 1, K)$ der **Spaltenvektoren** der Länge n. Den **Dualraum V^* von $V = K^n$** können wir entsprechend mit dem Vektorraum $M(1 \times n, K)$ aller **Zeilenvektoren** der Länge n identifizieren, dabei ordnen wir jeder Linearform $\phi\colon K^n \to K$ ihre Matrizendarstellung (bezüglich der kanonischen Basen von K^n und $K = K^1$) zu. Ist nun Φ eine endliche Teilmenge von V^*, so besteht also Φ aus endlich vielen Zeilenvektoren, etwa aus den Zeilenvektoren $[a_{i1}, \ldots, a_{in}]$ mit $1 \leq i \leq m$, und Φ° ist gerade die Menge $\text{Lös}(A, 0)$ aller Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $AX = 0$ mit $A = (a_{ij})_{ij}$.

Ist andererseits M eine endliche Teilmenge von $V = K^n$, so erhält man M° ebenfalls mit Hilfe eines homogenen linearen Gleichungssystems, wir müssen dabei allerdings transponieren: Wir können annehmen, dass M die Menge der Spalten einer Matrix B ist. Bilde die Lösungsmenge $\text{Lös}({}^tB, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix ${}^tB$. Die Transponierten der Vektoren in $\text{Lös}({}^tB, 0)$ sind Zeilenvektoren, also Elemente von V^*, und die Menge dieser transponierten Vektoren ist gerade M°.

Berechnung des Durchschnitts von Unterräumen U_1, U_2 eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Man kann die in Folgerung 3 formulierte Gleichung

$$\boxed{U_1 \cap U_2 = (U_1^\circ + U_2^\circ)^\circ}$$

verwenden, um den Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ effektiv zu berechnen.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{Q}^3$. Sei

$$U_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad U_2 = \langle \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \rangle.$$

Gesucht ist $U_1 \cap U_2$.

Es ist $V = \mathbb{Q}^3 = M(3 \times 1, \mathbb{Q})$, den Dualraum $(\mathbb{Q}^3)^*$ identifizieren wir mit $M(1 \times 3, \mathbb{Q})$.

(1) Berechnung von U_1°. Gesucht sind alle Zeilenvektoren $[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]$ mit

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} = 0,$$

also ist das Gleichungssystem $AX = 0$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & -5 & -5 \end{bmatrix}$ zu lösen. Eine Treppennormalform zu A ist $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, also gilt $U_1^\circ = \langle [-40, -9, 1] \rangle$.

(2) Berechnung von U_2°. Zu lösen ist hier das Gleichungssystem $BX = 0$ mit $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 6 \\ -7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. Eine Treppennormalform zu B ist $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$, also gilt $U_2^\circ = \langle [-4, -18, 1] \rangle$.

(3) Damit ist gezeigt: $U_1^\circ + U_2^\circ = \langle [-40, -9, 1], [-4, -18, 1] \rangle$.

(4) Berechnung von $(U_1^\circ + U_2^\circ)^\circ$. Gesucht sind alle Spaltenvektoren ${}^t[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]$ mit

$$[-40 \quad -9 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad [-4 \quad -18 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

also ist das Gleichungssystem $CX = 0$ mit $C = \begin{bmatrix} -40 & -9 & 1 \\ -4 & -18 & 1 \end{bmatrix}$ zu lösen. Eine Treppennormalform zu C ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{76} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{19} \end{bmatrix}$$

also gilt $U_1 \cap U_2 = (U_1^\circ + U_2^\circ)^\circ = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 76 \end{bmatrix} \rangle$.

Duale Abbildungen. Seien V, W Vektorräume, sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Die zu f *duale Abbildung* $f^*\colon W^* \to V^*$ ist folgendermaßen definiert: Für $\phi \in W^*$ ist $f^*(\phi) = \phi \circ f\colon V \to K$. Diese Zuordnung

$$\operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W^*, V^*) \quad \text{mit} \quad f \mapsto f^*$$

ist offensichtlich K-linear. Sind V, W endlich-dimensionale Vektorräume und wählen wir Basen $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ in V und $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ in W, so können wir f durch eine Matrix A beschreiben; *bezüglich der dualen Basen von* V^* *und* W^* *wird* f^* *durch die transponierte Matrix* ${}^tA$ *beschrieben.* (Dies sollte man nachrechnen!)

Lemma. *Seien* V, W *endlich-dimensionale Vektorräume. Sei* $f\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung. Dann ist*

$$(\operatorname{Im} f)^\circ = \operatorname{Kern} f^* \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im} f^*)^\circ = \operatorname{Kern} f.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass die Unterräume $(\operatorname{Im} f)^\circ$ und $\operatorname{Kern} f^*$ von W^* übereinstimmen. Sei also $\alpha \in W^*$. Genau dann ist $a \in (\operatorname{Im} f)^\circ$, wenn $\alpha(\operatorname{Im} f) = 0$ gilt, wenn also $\alpha \circ f = 0$, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha \in \operatorname{Kern} f^*$ liegt.

Nun betrachten wir die beiden Unterräume $(\operatorname{Im} f^*)^\circ$ und $\operatorname{Kern} f$ von V. Sei $v \in V$. Ist $v \in \operatorname{Kern} f$, so ist $f(v) = 0$, also ist $(\phi \circ f)(v) = \phi(f(v)) = 0$ für alle $\phi \in W^*$, und demnach $v \in (\operatorname{Im} f^*)^\circ$. Auch die Umkehrung gilt.

Korollar. *Seien* V, W *endlich-dimensionale Vektorräume. Sei* $f\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung. Die Abbildungen* f *und* f^* *haben den gleichen Rang.*

Beweis: Es ist

$$\operatorname{rang}(f^*) = \dim \operatorname{Im} f^* = \dim V^* - \dim(\operatorname{Im} f^*)^\circ = \dim V - \dim \operatorname{Kern} f = \operatorname{rang}(f).$$