1.Aufgabe

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Lemma 1. *Seien $\lambda_i \in K$ für $i = 1, \dots, n$ und $\lambda_s \neq 0$. Sei $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Dann ist $\mathcal{B}' := \{b_1, \dots, \widehat{b_s}, \dots, b_n, v\}$ eine Basis von V.*

Beweis. Ich zeige zunächst, dass $\mathcal{B}'$ ein Erzeugendensystem von V ist. Sei $u \in V$ beliebig. Dann gibt es eine Darstellung:

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$$

mit $\mu_i \in K$. Da auch gilt, dass

$$b_s = \lambda_s^{-1} v - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \lambda_s^{-1} \lambda_i b_i,$$

muss

$$u = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \mu_i b_i + \mu_s \lambda_s^{-1} v - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \mu_s \lambda_s^{-1} \lambda_i b_i$$

gelten. Also ist $u \in \operatorname{span}(\mathcal{B}')$ und damit $\mathcal{B}'$ ein Erzeugendensystem.
Nun bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{B}'$ linear unabhängig ist. Seien $\nu_1, \dots, \nu_n, \nu \in K$ mit

$$0 = \nu v + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \nu_i b_i.$$

Dann gilt:

$$0 = \nu \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \nu_i b_i$$

Da die Vektoren von $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind, müssen alle Koefizienten 0 sein.

$$\nu \lambda_i + \nu_i = 0 \text{ für } i = 1, \dots, \widehat{s}, \dots, n$$

$$\nu \lambda_s = 0$$

Da $\lambda_s \neq 0$ ist folgt, dass $\nu = 0$ ist. Damit müssen alle $\nu_i = 0$ sein und $\mathcal{B}'$ ist linear unabhängig. □

(a) Sei $w \in V \setminus \{0\}$. Dann ist zu zeigen, dass es ein $s \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\{b_1, \dots, \widehat{b_s}, \dots, b_n, w\}$ eine Basis ist.
Zu w gibt es eine Darstellung $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ mit $\lambda_i \in K$. Dabei muss es ein $s \in \{1, \dots, n\}$ geben mit $\lambda_s \neq 0$, da sonst $w = 0$ ist. Damit ist das Lemma anwendbar.

(b) Sei $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von V und $s \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Dann ist zu zeigen, dass es ein $w \in \mathcal{E}$ gibt, so dass $\{b_1, \dots, \widehat{b_s}, \dots, b_n, w\}$ eine Basis ist.
Angenommen man könnte alle Vektoren in $\mathcal{E}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\{b_1, \dots, \widehat{b_s}, \dots, b_n\}$ schreiben, dann würden bereits diese Vektoren V erzeugen, b_s wäre als Linearkombination der $b_1, \dots, \widehat{b_s}, \dots, b_n$ darstellbar und damit wäre $\mathcal{B}$ nicht mehr linear unabhängig. Also war die Annahme falsch und es gibt ein $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in \mathcal{E}$ mit $\lambda_s \neq 0$. Damit können wir wieder das Lemma anwenden.

2.Aufgabe

Sei $\mathcal{M} := \{[1, i, i^2, i^3] | i = 1, \dots, 999\}$.
Sei $\{[1, i_1, i_1^2, i_1^3], [1, i_2, i_2^2, i_2^3], [1, i_3, i_3^2, i_3^3], [1, i_4, i_4^2, i_4^3] | i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \dots, 999\}\}$ eine vierelementige Teilmenge von $\mathcal{E}$. Dann ist:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & i_1 & i_1^2 & i_1^3 \\ 1 & i_2 & i_2^2 & i_2^3 \\ 1 & i_3 & i_3^2 & i_3^3 \\ 1 & i_4 & i_4^2 & i_4^3 \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq l < k \leq 4} (i_k - i_l) \neq 0$$

Und damit sind je vier Vektoren von $\mathcal{M}$ linear unabhängig und eine Basis des $\mathbb{Q}^4$.

3.Aufgabe

Sei V ein Vektorraum.

(a) Zu zeigen ist, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\dim V \geq n$
2. Es gibt Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n \subseteq V$.

Sei $\dim V \geq n$ und sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Teilmenge einer Basis von V. Diese existiert, da eine Basis von V mindestens aus n Vektoren besteht. Dann sei $U_i := \operatorname{span}(b_1, \dots, b_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Offensichtlich gilt: $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n \subseteq V$.
Seien nun Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n \subseteq V$ gegeben. Dann ist zu zeigen, dass $\dim V \geq n$ gilt. Angenommen $\dim V < n$. Dann ist $\dim U_n < n$. Induktiv zeigt man, dass $\dim U_i < i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Damit muss $U_1 = 0$ sein, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist. Somit ist $\dim V \geq n$.

(b) Zu zeigen ist, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\dim V \leq n$
2. Gibt es Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_m \subseteq V$, so ist $m \leq n$.

Angenommen $\dim V \leq n$. Seien Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_m \subseteq V$ gegeben, so ist zu zeigen, dass $m \leq n$ gilt. Wenn $m > n$ wäre, so wäre nach (a) $\dim V > n$ im Widerspruch zu $\dim V \leq n$.
Nun ist noch die Umkehrung zu zeigen. Wenn $\dim V > n$ gilt, so gibt es nach (a) Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n+1} \subseteq V$. Also gilt 2. nicht, wenn 1. nicht gilt, das heißt 2. impliziert 1.

4.Aufgabe

Eine mögliche Lösung ist: $b_1 = e_1, b_2 = e_2 - e_3, b_3 = e_3 - e_1$. Das Nachrechnen sei dem fleißigen Leser überlassen.