Aufgabe 1)

a) Zu zeigen sind beide Inklusionen.
Sei zunächst $u \in U$. Dann gilt nach Definition $f(u) \in f(U)$ und damit auch $u \in f^{-1}f(U)$. Also folgt $U \subseteq f^{-1}f(U)$.
Sei nun $k \in \operatorname{Kern}(f)$. Dann ist $f(k) = 0 \in f(U)$, da $f(U)$ ein Untervektorraum von V' ist. Daraus folgt $k \in f^{-1}f(U)$, also $\operatorname{Kern}(f) \subseteq f^{-1}f(U)$.
Insgesamt gilt also: $U + \operatorname{Kern}(f) \subseteq f^{-1}f(U)$.
Sei umgekehrt $v \in f^{-1}f(U)$. Dann ist $f(v) \in f(U)$, also existiert ein $u \in U$ mit $f(v) = f(u)$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $0 = f(v) - f(u) = f(v-u)$, also gilt $v - u \in \operatorname{Kern}(f)$. Also gilt:

$$v = \underbrace{(v-u)}_{\in \operatorname{Kern}(f)} + \underbrace{(u)}_{\in U} \in \operatorname{Kern}(f) + U$$

Dies beweist die andere Inklusion.

b) Auch hier werden beide Inklusionen gezeigt.
Die Inklusion $ff^{-1}(U') \subseteq \operatorname{Bild}(f)$ ist klar. Sei also $w \in ff^{-1}(U')$. Dann existiert ein $v \in f^{-1}(U')$ mit $f(v) = w$ und die Definition von v liefert $w \in U'$. Insgesamt gilt also $ff^{-1}(U') \subseteq U' \cap \operatorname{Bild}(f)$.
Sei also $u' \in U' \cap \operatorname{Bild}(f)$. Da $u' \in \operatorname{Bild}(f)$ gibt es ein $a \in V$ mit $f(a) = u' \in U'$, also folgt $a \in f^{-1}(U')$. Dies aber zeigt: $u' \in ff^{-1}(U')$.
Beide Inklusionen zusammen ergeben nun das Gewünschte.

c) Seien $M := \{U \subseteq V : U \text{ ist Untervektorraum mit } \operatorname{Kern}(f) \subseteq U\}$ und $N := \{u' \subseteq V' : u'' \text{ ist Untervektorraum mit } U' \subseteq \operatorname{Bild}(f)\}$. Definiere die Abbildung $\varphi : M \to N$ gegeben durch $\varphi(U) := f(U)$. Zu zeigen ist die Bijektivität von φ.
Zunächst die Injektivität. Seien also $U, W \in M$ mit $\varphi(U) = \varphi(W)$, also $f(U) = f(W)$. Zu zeigen ist $U = W$. Da U und W beide in M liegen gilt: $\operatorname{Kern}(f) \subseteq U$ und $\operatorname{Kern}(f) \subseteq W$. Es folgt:

$$U = U + \operatorname{Kern}(f) \overset{a)}{=} f^{-1}f(U) = f^{-1}f(W) \overset{a)}{=} W + \operatorname{Kern}(f) = W$$

Zur Surjektivität: Sei $U' \in N$ beliebig. Definiere $U := f^{-1}(U')$. Dann ist U ein Untervektorraum von V. Für jedes $k \in \operatorname{Kern}(f)$ gilt $f(k) = 0 \in U'$, also ist $\operatorname{Kern}(f) \subseteq U$ bzw. $U \in M$. Es gilt:

$$\varphi(U) = f(U) = ff^{-1}(U') \overset{b)}{=} U' \cap \operatorname{Bild}(f) = U'$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $U' \subseteq \operatorname{Bild}(f)$, weil $U' \in N$ nach Voraussetzung. Also haben wir das gesuchte Urbild konstruiert und φ ist eine Bijektion. $\square$

Aufgabe 2)

a) Auch dies lösen wir elementweise:
Sei $w \in f(U_1 \cap U_2)$. Dann gibt es ein $v \in U_1 \cap U_2$ mit $f(v) = w$. Es gilt aber $v \in U_1 \Rightarrow w \in f(U_1)$ und ebenso $v \in U_2 \Rightarrow w \in f(U_2)$, also

insgesamt $w \in f(U_1) \cap f(U_2)$.
Für die Gleichheit der anderen beiden Mengen betrachte für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ die Gleichheit:

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

Das folgt aus der Linearität von f und zeigt sofort die Behauptung.

b) Für die erste Gleichheit wird die Linearität von f nicht benötigt, denn die Aussage gilt ganz allgemein:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(U_1' \cap U_2') &\Leftrightarrow f(a) \in U_1' \cap U_2' \\ &\Leftrightarrow f(a) \in U_1' \wedge f(a) \in U_2' \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(U_1') \wedge a \in f^{-1}(U_2') \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(U_1') \cap f^{-1}(U_2') \end{aligned}$$

Für die Inklusion betrachte $v \in f^{-1}(U_1') + f^{-1}(U_2')$. Dann ist $v = w_1 + w_2$ mit $f(w_1) \in U_1'$ und $f(w_2) \in U_2'$. Also folgt:

$$f(v) = f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) \in U_1' + U_2' \Rightarrow v \in f^{-1}(U_1' + U_2')$$

c) Für das erste Beispiel sei $V := \mathbb{R}^2$, $V' := \mathbb{R}$ und $U_1 := \langle e_1 \rangle$, sowie $U_2 := \langle e_2 \rangle$ die x-Achse und die y-Achse. Sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(e_1) = f(e_2) = 1$. Dann gilt:

$$U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow f(U_1 \cap U_2) = \{0\}$$

Aber $f(U_1) = f(U_2) = \mathbb{R}$ und daraus folgt

$$f(U_1) \cap f(U_2) = \mathbb{R} \neq \{0\}$$

Also gilt die andere Inklusion in a) im Allg. nicht.
Für das zweite Gegenbeispiel sei $V := \mathbb{R}$, $V' := \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(1) = e_1 + e_2$. Seien $U_1' := \langle e_1 \rangle$ und $U_2' := \langle e_2 \rangle$ wieder die x-Achse bzw. die y-Achse. Dann gilt:

$$f^{-1}(U_1') = \{0\} = f^{-1}(U_2') \Rightarrow f^{-1}(U_1') + f^{-1}(U_2') = \{0\}$$

Zugleich gilt aber $U_1' + U_2' = \mathbb{R}^2$, also

$$f^{-1}(U_1' + U_2') = f^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \neq \{0\}$$

Dies zeigt, dass die andere Inklusion in b) auch im Allg. nicht gilt. □

Aufgabe 3)

a) Definiere $U_1 := \text{Bild}(f)$ und $U_2 := \text{Kern}(f)$. Es ist klar, dass für $u \in U_2$ sofort $f(u) = 0$ gilt. Sei also $u \in U_1$, dann existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = u$. Daraus folgt:

$$f(u) = f(f(w)) = f^2(w) = f(w) = u$$

Damit erfüllen U_1 und U_2 die Bedingungen. Es bleibt zu zeigen: $V = U_1 \oplus U_2$. Sei dazu zunächst $u \in U_1 \cap U_2$. Aufgrund der oben gezeigten Eigenschaften gilt $f(u) = u$, da $u \in U_1$, aber auch $f(u) = 0$, da $u \in U_2$. Daraus folgt $u = 0$, also gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
Sei nun $v \in V$ beliebig. Definiere $w := v - f(v)$. Dann folgt:

$$f(w) = f(v-f(v)) = f(v)-f^2(v) = f(v)-f(v) = 0 \Rightarrow w \in \mathrm{Kern}(f) = U_2$$

Also lässt sich v zerlegen:

$$v = v - f(v) + f(v) = w + f(v) \in U_2 + U_1$$

b) Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine beliebige Basis von U_1 und $(w_1, \dots, w_l)$ eine Basis von U_2. Da $V = U_1 \oplus U_2$ ist $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots w_l)$ eine Basis von V. Die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ erfüllt die geforderten Bedingungen, da nach Aufgabe a) gilt: $f(v_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq r$ und $f(w_j) = 0$ für $1 \leq j \leq l$. $\square$

Aufgabe 4)

a) Seien $f, g \in K[T]$ beliebige Polynome und $\lambda \in K$. Seien Darstellungen von f und g wie folgt gegeben:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \qquad g = \sum_{i=0}^{n} b_i T^i$$

Ohne Einschränkung kann man dabei annehmen, dass beide Summen bis n laufen: definiere n als das Maximum der Grade von f und g und setze für das jeweils andere Polynom die höheren Koeffizienten gleich 0.
Nun rechnet man die Linearität von δ nach:

$$\delta(f+g) = \delta\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)T^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i(a_i+b_i)T^{i-1}$$

Andererseits gilt:

$$\delta(f) + \delta(g) = \sum_{i=1}^{n} i a_i T^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i b_i T^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i(a_i+b_i)T^{i-1}$$

Außerdem ist

$$\lambda\delta(f) = \lambda \sum_{i=1}^{n} i a_i T^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i(\lambda a_i)T^{i-1} = \delta(\lambda f)$$

Also ist δ linear. An der Definition erkennt man schon, dass für $f \in \mathcal{P}_n$ folgt: $\delta(f) \in \mathcal{P}_{n-1} \subseteq \mathcal{P}_n$.

b) Sei $\mathcal{B} := (1, T, T^2, \dots, T^9)$ eine Basis von $\mathcal{P}_\exists$. Für $K = \mathbb{R}$ betrachte die darstellende Matrix von δ bezüglich dieser Basis:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Matrix ist in Zeilenstufenform und hat offensichtlich den Rang 9. Ist nun $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so gilt dies immer noch, falls $p > 9$. Betrachte also Primzahlen, die kleiner sind als 9:

$p = 7$ Dadurch wird eine Zeile in der Matrix zu einer Nullzeile. Der Rang verringert sich auf 8.

$p = 5$ Wieder ist nur eine Zeile betroffen. Ebenfalls Rang 8.

$p = 3$ Hier werden die Zeilen 3, 6 und 9 zu Nullzeilen, wir erhalten also eine Matrix vom Rang 6.

$p = 2$ In diesem Fall werden die Zeilen 2, 4, 6 und 8 zu Nullzeilen, die neue Matrix hat also den Rang 5.

Damit wurden alle Fälle betrachtet. $\square$