Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a + d = 0$ und $ad - bc = 0$. Daraus folgt $d = -a$ und damit auch $-a^2 - bc = 0$ bzw. $a^2 + bc = 0$. Eingesetzt folgt für A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab - ba \\ ac - ca & bc + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Und das war zu zeigen. □

Aufgabe 2

Im Folgenden soll ein $*$ als Platzhalter für ein beliebiges Element aus R dienen. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine (5×5) Matrix mit Koeffizienten aus R, für die gilt: $a_{ij} = 0$ falls $i \geq j$. Es folgt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist A^5 in jedem Fall die Nullmatrix. □

Aufgabe 3

Sei A wie auf dem Zettel angegeben.

- (i) $\Rightarrow$ (ii)
  Falls $AB = BA$ für alle 2×2 Matrizen B gilt, dann insbesondere auch für E_{12} und E_{21}.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii)
  Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Nach Voraussetzung gilt:

  $$E_{12} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E_{12}$$

  Daraus folgt:

  $$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Daraus sieht man sofort: $c = 0$ und $a = d$.
Es gilt aber auch $E_{21}A = AE_{21}$ und daraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt auch $b = 0$ und damit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

- (iii) $\Rightarrow$ (i)
  Sei $a \in R$ und $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, sowie B eine beliebige (2×2)-Matrix mit Koeffizienten in R. Dann gilt:

$$BA = B \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = Ba \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aB = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = AB$$

  Das folgt aus der Tatsache, dass der Ring kommutativ ist. $\square$