Aufgabe 1

Bezeichne die Menge der oberen Dreiecksmatrizen über einem kommutativen Ring R mit $B_n(R) := \{A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, R) : a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\}$. Zu zeigen ist, dass $B_n(R)$ ein Unterring von $M(n \times n, R)$ ist. Zunächst gilt sowohl für die Nullmatrix, als auch für die Einheitsmatrix I_n, dass alle Einträge unterhalb der Diagonalen gleich 0 sind - daher gilt $0 \in B_n(R)$ und $I_n \in B_n(R)$.
Seien nun $A, B \in B_n(R)$ beliebig. Definiere $C := A + B$, $D := AB$ und $E := -A$. Zu zeigen: $C, D, E \in B_n(R)$.
Sei dazu $i > j$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow C \in B_n(R)$$

Ebenso folgt leicht:

$$e_{ij} = -a_{ij} = -0 = 0 \Rightarrow E \in B_n(R)$$

Für D folgt nun:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0$$

Also $D \in B_n(R)$. Dies folgt, da in der ersten Summe $i > k$ und in der zweiten Summe gilt $k \geq i > j$ und daher ist in der ersten Summe $a_{ik} = 0$ und in der zweiten Summe ist $b_{kj} = 0$.
Damit ist $B_n(R)$ ein Unterring des Matrizenringes. □

Aufgabe 2

Bezeichne die Menge der Matrizen aus der Aufgabe mit U. Für $a = b = 0$ bzw. $a = 1$ und $b = 0$ gilt natürlich: $0 \in U$ und $I_2 \in U$. Seien also $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$. Definiere dann $B := A_1 + A_2$, $C := A_1A_2$ und $D := -A_1$. Zu zeigen: $B, C, D \in U$.
Betrachte also B:

$$B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in U$$

Das ist klar, da die Summe zweier rationaler Zahlen wieder rational ist. ($\mathbb{Q}$ ist ein Körper!)
Für D gilt:

$$D = \begin{pmatrix} (-a_1) & -(-b_1) \\ (-b_1) & (-a_1) \end{pmatrix} \in U$$

Das folgt wiederum daraus, dass mit $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$ auch gilt: $(-a_1), (-b_1) \in \mathbb{Q}$.
Schliesslich gilt:

$$C = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} \in U$$

Damit ist U ein Unterring von $M(2\times 2,\mathbb{Q})$. Man bermekt übrigens leicht, dass für $C' := A_2A_1$ gilt:

$$C' = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} = C$$

Und damit ist U kommutativ bzgl. der Matrizenmultiplikation. Nun muss noch gezeigt werden, dass jedes $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in U$ mit $A \neq 0$ invertierbar ist mit $A^{-1} \in U$. Sei also $A \neq 0$ wie oben, dann folgt $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Definiere nun $A' := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$AA' = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab-ba \\ ba-ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Da $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ folgt: $a^2+b^2 \neq 0$ und somit gilt: $A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}A' \in U$. Und damit ist U ein Körper. □

Aufgabe 3

Sei zunächst $A = aI_n$ eine Skalarmatrix mit $a \in R$ und $B \in M(n \times n, R)$ beliebig. Es gilt:

$$BA = BaI_n = aBI_n = aI_nB = AB$$

Daraus folgt, dass eine Skalarmatrix mit jeder anderen Matrix kommutiert.

Sei nun umgekehrt eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, R)$ gegeben, die mit jeder beliebigen $(n \times n)$-Matrix über R kommutiert. Zu zeigen: A ist eine Skalarmatrix.
Seien dazu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ beliebig vorgegeben. Definiere $B := AE_{ij}$ und $C := E_{ij}A$. Nach Voraussetzung gilt $B = C$. Wie sehen B und C aus? Es gilt:

$$b_{kl} = \begin{cases} a_{ki} & \text{falls } l = j \\ 0 & \text{falls } l \neq j \end{cases} \quad \text{und } c_{kl} = \begin{cases} a_{jl} & \text{falls } k = i \\ 0 & \text{falls } k \neq i \end{cases}$$

Daraus folgt: $a_{ji} = c_{ii} = b_{ii} = 0$ und $a_{ii} = b_{ij} = c_{ij} = a_{jj}$. Da i und j beliebig waren, ist $A = aI_n$ mit $a = a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$. □

Aufgabe 4

Bezeichne die Menge der $(n \times n)$-Monomialmatrizen mit U.

a) Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in U$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein eindeutig bestimmtes $l(i)$ mit $a_{i,l(i)} \neq 0$ und $a_{ij} = 0$ falls $j \neq l(i)$. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $l : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots n\}$ eine Bijektion. (Anschaulich gesprochen ordnet l jeder Zeile diejenige Spalte zu, in der das von Null verschiedene Element steht. Wegen der Eigenschaft der Monomialmatrizen lässt sich diese Abbildung umkehren, indem man einfach jeder Spalte diejenige Zeile zuordnet, in dem das von Null verschiedene Element steht. Also ist l bijektiv.)
Definiere eine Matrix $B = (b_{ij})_{i,j} \in U$ wie folgt: Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ setze $b_{l(i),i} := (a_{i,l(i)})^{-1}$ und $b_{ji} := 0$ für $j \neq l(i)$. Da K ein Körper ist, kann

man jedes von Null verschiedene Element invertieren.
Sei $C = (c_{ij})_{i,j} := AB$. Falls $i \neq j$, gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i,l(i)}b_{l(i),j} = 0$$

Das gilt, da $l(i) \neq l(j)$ für $i \neq j$ (l ist insbesondere injektiv). Ausserdem erkennt man:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = a_{i,l(i)}b_{l(i),i} = a_{i,l(i)}(a_{i,l(i)})^{-1} = 1$$

Damit ist $c_{ij} = \delta_{ij}$ also $C = I_n$. Nebenbei folgt, dass für $A \in U$ gilt: $A^{-1} \in U$.

b) Seien $A, B \in U$. Zu zeigen: $C := AB \in U$. ($C = (c_{ij})_{i,j}$)
Sei also $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$ und seien wie in Teil a) bijektive Abbildungen $l, h : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\}$ gegeben mit $a_{i,l(i)} \neq 0$ und $b_{i,h(i)} \neq 0$.
Betrachte einen Eintrag c_{ij}.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i,l(i)}b_{l(i),j}$$

Falls $j = h(l(i))$, so gilt $c_{ij} = a_{i,l(i)} \cdot b_{l(i),h(l(i))} \neq 0$, da K nullteilerfrei ist.
Für $j \neq h(l(i))$ hingegen folgt: $c_{ij} = 0$.
Damit gibt es in jeder Zeile i von C genau ein von Null verschiedenes Element und zwar in der Spalte $h(l(i))$. Und da $h \circ l$ als Verknüpfung bijektiver Abbildungen wieder bijektiv ist, gibt es auch in jeder Spalte genau ein von Null verschiedenes Element. C ist also eine Monomialmatrix: $C \in U$.
Damit sind wir fertig, denn in Teil a) haben wir bereits gezeigt, dass zu jeder Monomialmatrix das Inverse existiert und wieder eine Monomialmatrix ist und aufgrund der Abgeschlossenheit folgt nun direkt: $I_n \in U$.
Somit ist U eine Untergruppe von $GL(n, K)$. $\square$