Sei K ein Körper, R ein kommutativer Ring.

1.Aufgabe

Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $l = \min\{m, n\}$. Sei $s \in \mathbb{N}_0$ die minimale Anzahl von Zeilenoperationen, um A in Schubert-Normalform zu bringen.Zu zeigen: $s \leq ml$
Seien für $0 \leq l < n$ die ersten l Spalten bereits in Schubertnormalform, wobei bereits k Pivotspalten in den ersten l Spalten vorkommen. Um die $l+1$ Spalte in Schubertnormalform zu bringen, unterscheide zwei Fälle:

1.Fall

$\forall i \in \{k+1, \ldots, n\} : a_{i,l+1} = 0$. Dann ist in dieser Spalte nichts umzuformen.

2.Fall

$\exists i \in \{k+1, \ldots, n\} : a_{i,l+1} \neq 0$. Falls gilt, dass $a_{k+1,l+1} \neq 0$, braucht man eine Multiplikation der $(k+1)$-ten Zeile mit $a_{k+1,l+1}^{-1}$ damit der Pivot 1 wird und maximal $(m-1)$ Additionen eines Vielfachen der $(k+1)$-ten Zeile damit über und unter dem Pivot Nullen stehen. Bei beiden Operationen bleiben die ersten l Spalten in Schubertnormalform, da die $(k+1)$-te Zeile nur Nullen vor der $(l+1)$-ten Spalte stehen hat.
Falls gilt, dass $a_{k+1,l+1} = 0$ muss man erst die $(k+1)$-te Zeile von A mit der i-ten Zeile tauschen, wobei $i \in \{k+1, \ldots, n\} : a_{i,l+1} \neq 0$ gelten muss. Man braucht zunächst diese eine Operation mehr, jedoch spart man eine Addition eines Vielfachen der $(k+1)$-ten Zeile, da nach dem Zeilenvertauschen $a_{i,l+1} = 0$ ist.
Man braucht also für eine Pivotspalte maximal m Zeilenoperationen. Da man für die übrigen Spalten keine weiteren Operationen benötigt, folgt:

$$s \leq m \cdot \text{Anzahl der Pivotspalten} \leq ml.$$

2.Aufgabe

Seien $\lambda, \mu \in K$. Gesucht sind alle Matrizen $A \in M(n \times n, K)$, so dass:

$$A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} A.$$

1.Fall:

$\mu = \lambda$

Dann ist $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ eine Skalarmatrix und nach Aufgabe 3 auf Blatt 2 kommutiert sie mit jeder Matrix.

2.Fall:

$\mu \neq \lambda$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Falls

$$A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} A.$$

gilt, ist:

$$\begin{pmatrix} a\lambda & b\mu \\ c\lambda & d\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda & b\lambda \\ c\mu & d\mu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} b\lambda = b\mu \\ c\lambda = c\mu \end{array}$$

Also ist $b(\lambda - \mu) = c(\lambda - \mu) = 0$. Da $\lambda - \mu \neq 0$ und ein Körper nullteilerfrei ist, muss $b = c = 0$ sein. Also ist A eine Diagonalmatrix.

Ist umgekehrt A' eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ mit $p, q \in K$, dann ist:

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\lambda & 0 \\ 0 & p\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Also sind die Matrizen, die mit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ kommutieren, genau die Diagonalmatrizen.

3.Aufgabe

Sei $J = (c_{ij}) = \begin{cases} 0, & i \neq j-1 \\ 1, & i = j-1 \end{cases}$

Sei $(c_{ij}^{(l)}) = J^n$ für $l = 0, \ldots, n-1$.

Dann ist: $c_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 0, & i \neq j-l \\ 1, & i = j-l \end{cases}$.

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ beliebig. Zu zeigen: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $AJ = JA$

(ii) $a_{ij} = 0$ für $i > j$ und für $j - i = t - s \geq 0$ ist $a_{ij} = a_{st}$.

(iii) A ist eine Linearkombination der Matrizen $I, J, J^2, J^3, \ldots, J^{n-1}$.

Beweis:

(i)⇒(ii) Sei $i \leq j$ und $j - i = t - s$. Dann ist zu zeigen, dass $a_{ij} = a_{st}$. Sei o.B.d.A. $t > j$. Setze $l := t - j = s - i$. Dann ist, wie man leicht per Induktion zeigt, wegen $AJ = JA$ auch $AJ^l = J^l A$. Seien $(d_{ij}) = AJ^l$ und $(e_{ij}) = J^l A$. Dann ist:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} c_{k,j+l}^{(l)} = d_{i,j+l} = e_{i,j+l} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}^{(l)} a_{k,j+l} = a_{i+l,j+l} = a_{s,t}$$

Sei nun $i > j$. Dann sei $l := n - i + 1$. Beachte, dass $j + l = j - (i-1) + n \leq n$ ist. Es gilt wieder wegen $AJ = JA$, dass $AJ^l = J^l A$ ist. Seien $(d'_{ij}) = AJ^l$ und $(e'_{ij}) = J^l A$. Dann ist:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} c_{k,j+l}^{(l)} = d'_{i,j+l} = e'_{i,j+l} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}^{(l)} a_{k,j+l} = \sum_{k=1}^{n} 0 a_{k,j+l} = 0$$

(ii)⇒(iii) Sei $B = (b_{ij}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{1,k+1} J^k$. Zu zeigen: $A = B$.
Für $i > j$ ist $a_{ij} = 0 = b_{ij}$.
Für $i \leq j$ ist:

$$a_{i,j} = a_{1,j-i+1} = b_{1,j-i+1} = b_{i,j}.$$

Also ist$A = B$.

(iii)⇒(i) Sei $A = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i J^i$ mit $\lambda_0, \ldots, \lambda n - 1 \in K$. Dann ist:

$$\begin{aligned} AJ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i J^i \right) J = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\lambda_i J^i \right) J = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i J^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(J \lambda_i J^i \right) = J \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i J^i \right) = JA. \end{aligned}$$

4.Aufgabe

Seien $A, B \in M(n \times n, R)$. Zu zeigen: $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$. Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij}) = AB, D = (d_{ij})$. Es gilt:

$$\text{Spur}(AB) = \sum_{l=1}^{n} c_{ll} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk} b_{kl} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} a_{lk} \right) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \text{Spur}(BA)$$