**Aufgabe 1**

Sei $R$ ein Ring und $S$, $S'$ Unterringe von $R$.

a) Beh: $S \cap S'$ ist ein Unterring von $R$.
Beweis :

- Da sowohl $S$ als auch $S'$ Unterringe von $R$ sind, enthalten beide das neutrale Element bzgl. der Addition $0_R$ und das neutrale Element bzgl. der Multiplikation $1_R$.
  Also gilt $1_R \in S \cap S'$ und $0_R \in S \cap S'$.
- Seien nun $x, y \in S \cap S'$.
  Weil $S$ ein Unterring von $R$ ist, ist $x - y \in S$ und $x \cdot y \in S$.
  Ebenso ist aber auch $S'$ ein Unterring von $R$ und damit $x - y \in S'$ und $x \cdot y \in S'$.
  Also gilt $x - y \in S \cap S'$ und $x \cdot y \in S \cap S'$.

$\square$

b) Beh : Ist $r \in R$ invertierbar, so ist $r^{-1}Sr$ ebenfalls ein Unterring von $R$.
Beweis :

- Da $S$ ein Unterring von $R$ ist, enthält es $0_R$ und $1_R$.
  Also gilt $0_R = r^{-1}0_R r \in r^{-1}Sr$
  und $1_R = r^{-1}1_R r \in r^{-1}Sr$.
- Seien nun $x, y \in r^{-1}Sr$, d.h. es gibt $s, t \in S$ mit $x = r^{-1}sr$ und $y = r^{-1}tr$.
  Da $S$ ein Unterring von $R$ ist, ist $s - t \in S$ und $s \cdot t \in S$.
  Also gilt $x - y = r^{-1}sr - r^{-1}tr = r^{-1}(s - t)r \in r^{-1}Sr$
  und $x \cdot y = (r^{-1}sr)(r^{-1}tr) = r^{-1}(st)r \in r^{-1}Sr$.

$\square$

c) Es sei $N^+ = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \quad a, b, c \in R\}$.
(Beachte $N^+$ ist eine Untergruppe der $GL(n, R)$, aber kein Ring.)
Für die sechs Permutationsmatrizen $P \in M(3 \times 3, R)$ bestimmen wir die folgende Untergruppe der $GL(n, R)$: $N^+ \cap P^{-1}N^+P$.
$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, folgendermaßen zu lesen:
$(12)$ meint $1 \mapsto 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$, oder z Bsp. $(123)$ meint $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$.
Für $\sigma \in S_3$ ist $P_\sigma := E_{1,\sigma(1)} + E_{2,\sigma(2)} + E_{3,\sigma(3)}$ zugehörige Permutationsmatrix.
Beobachtung: Bei einer Multiplikation $P_\sigma A$ werden die Zeilen von $A$ wie folgt permutiert:
In der $i$-ten Zeile von $P_\sigma A$ steht die $\sigma(i)$-te Zeile von $A$.
M.a.W.: Die $i$-te Zeile von $A$, findet man in der $\sigma^{-1}(i)$-ten Zeile von $P_\sigma A$

wieder. In Detail:

$$
\begin{aligned}
(E_{1,\sigma(1)} + E_{2,\sigma(2)} + E_{3,\sigma(3)})A &= \\
E_{1,\sigma(1)}A + E_{2,\sigma(2)}A + E_{3,\sigma(3)}A &= \\
E_{1,\sigma(1)}(\sum_{i=1}^{3} a_{\sigma(1),i}E_{\sigma(1),i}) + E_{2,\sigma(2)}(\sum_{i=1}^{3} a_{\sigma(2),i}E_{\sigma(2),i}) + E_{3,\sigma(3)}(\sum_{i=1}^{3} a_{\sigma(3),i}E_{\sigma(3),i}) &= \\
\sum_{i=1}^{3} a_{\sigma(1),i}E_{1,i} + \sum_{i=1}^{3} a_{\sigma(2),i}E_{2,i} + \sum_{i=1}^{3} a_{\sigma(3),i}E_{3,i}
\end{aligned}
$$

d.h. $P_\sigma A = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1),\bullet} \\ A_{\sigma(2),\bullet} \\ A_{\sigma(3),\bullet} \end{pmatrix}$

Bei einer Multiplikation $AP_\sigma$ werden die Spalten von $A$ wie folgt permutiert.
In der $i$-ten Zeile von $AP_\sigma$ steht die $\sigma^{-1}(i)$-te Zeile von $A$.
M.a.W.: Die $i$-te Zeile von $A$, findet man in der $\sigma(i)$-ten Zeile von $AP_\sigma$ wieder. In Detail:

$$
\begin{aligned}
A(E_{1,\sigma(1)} + E_{2,\sigma(2)} + E_{3,\sigma(3)}) &= \\
AE_{1,\sigma(1)} + AE_{2,\sigma(2)} + AE_{3,\sigma(3)} &= \\
(\sum_{i=1}^{3} a_{i,1}E_{i,1})E_{1,\sigma(1)} + (\sum_{i=1}^{3} a_{i,2}E_{i,2})E_{2,\sigma(2)} + (\sum_{i=1}^{3} a_{i,3}E_{i,3})E_{3,\sigma(3)} &= \\
\sum_{i=1}^{3} a_{i,1}E_{i,\sigma(1)} + \sum_{i=1}^{3} a_{i,2}E_{i,\sigma(2)} + \sum_{i=1}^{3} a_{i,3}E_{i,\sigma(3)} &= \\
\sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k}E_{i,\sigma(k)} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{i,\sigma^{-1}(j)}E_{i,j} &= \\
\sum_{i=1}^{3} a_{i,\sigma^{-1}(1)}E_{i,1} + \sum_{i=1}^{3} a_{i,\sigma^{-1}(2)}E_{i,2} + \sum_{i=1}^{3} a_{i,\sigma^{-1}(3)}E_{i,3}
\end{aligned}
$$

d.h. $AP_\sigma = \begin{pmatrix} A_{\bullet,\sigma^{-1}(1)}, & A_{\bullet,\sigma^{-1}(2)}, & A_{\bullet,\sigma^{-1}(3)} \end{pmatrix}$

1. $\sigma = id$, $\sigma^{-1} = \sigma$
   offensichtlich gilt $N^+ \cap I^{-1}N^+I = N^+$
2. $\sigma = (12)$, $\sigma^{-1} = \sigma$
   $P_{(12)} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   also $N^+ \cap P_{(12)}N^+P_{(12)} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | b, c \in R\}$
3. $\sigma = (13)$, $\sigma^{-1} = \sigma$
   $P_{(13)} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 1 & a & b \end{pmatrix} P_{(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}$

also $N^+ \cap P_{(13)} N^+ P_{(13)} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \}$

4. $\sigma = (23)$, $\sigma^{-1} = \sigma$

   $$P_{(23)} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} P_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

   also $N^+ \cap P_{(23)} N^+ P_{(23)} = \{ \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b \in R\}$

5. $\sigma = (123)$, $\sigma^{-1} = (132)$

   $$P_{(132)} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} P_{(123)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & a \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   also $N^+ \cap P_{(132)} N^+ P_{(123)} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in R\}$

6. $\sigma = (132)$, $\sigma^{-1} = (123)$

   $$P_{(123)} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix} P_{(132)} = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

   also $N^+ \cap P_{(123)} N^+ P_{(132)} = \{ \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | c \in R\}$

**Aufgabe 2**

Sei $R$ ein Ring und $A, B, C \in M(n \times n, R)$.

a) Beh : $A$, $A$ sind ähnlich.
Beweis : $A = I \cdot A \cdot I^{-1}$ und $I \in GL(n, R)$.
Also ist $A$ ähnlich zu sich selbst. □

b) Beh : Sind $A$, $B$ ähnlich , dann sind auch $B$, $A$ ähnlich.
Beweis : Sind $A$,$B$ ähnlich,
dann gibt es ein $P \in GL(n, R)$ mit $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$.
$\Rightarrow A = Q \cdot B \cdot Q^{-1}$ mit $Q = P^{-1} \in GL(n, R)$.
Also nach Definition sind $B$, $A$ ähnlich. □

c) Beh : Sind $A$, $B$ ähnlich und $B$, $C$ ähnlich, dann sind auch $A$, $C$ ähnlich.
Beweis : Sind $A$, $B$ ähnlich und $B$, $C$ ähnlich,
dann gibt es $P, Q \in GL(n, R)$ mit
$B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ und $C = Q \cdot B \cdot Q^{-1}$.
$\Rightarrow C = Q \cdot (PAP^{-1}) \cdot Q^{-1} = (QP) \cdot A \cdot (QP)^{-1}$.
Da $GL(n, R)$ multiplikativ abgeschlossen ist, ist $T = QP \in GL(n, R)$ und somit $A$, $C$ ähnlich. □

d) Beh : Ist $R$ kommutativ, und sind $A$, $B$ ähnlich, dann ist
$Spur(A) = Spur(B)$.
Beweis : Sind $A$,$B$ ähnlich,

dann gibt es ein $P \in GL(n,R)$ mit $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$.
Nach Aufgabe 4, Blatt 4 gilt:
$Spur(B) = Spur(PAP^{-1}) = Spur(P^{-1}PA) = Spur(A)$ $\square$

**Aufgabe 3**

Sei $K$ ein Körper und $\lambda, \mu \in K$.

Beh : Es gibt $a, b \in K$ mit $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ sind ähnlich $\Leftrightarrow \lambda \neq \mu$.

Beweis : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ sind ähnlich
$\Leftrightarrow$ es gibt ein $P \in GL(2,K)$ mit $P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
(ich schreibe $P = (v, w)$ mit $v$ ist die erste Spalte von $P$ und $w$ die zweite)
$\Leftrightarrow$ es gibt ein $(v, w) \in GL(2,K)$ mit
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}(v, w) = (v, w)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = (av, aw)$
d.h. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} v = av$ und $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} w = bw$,
(Beachte: offensichtlich sind $v$ und $w$ nur bis auf skalare Vielfache eindeutig, das meint: ist $v$ eine Lösung, so auch $kv$ für alle $k \in K$)
bzw.

$$\begin{aligned} \lambda v_1 + v_2 &= av_1 \\ \mu v_2 &= av_2 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \lambda w_1 + w_2 &= bw_1 \\ \mu w_2 &= bw_2 \end{aligned}$$

- Ist $v_2 = 0$, dann sind wegen $(v, w) \in GL(2,K)$: $v_1 \neq 0$ und $w_2 \neq 0$.
  Also ergeben die Gleichungen :
  $\lambda = a$ und $\mu = b$, und damit $w_2 = (\mu - \lambda)w_1$.
  Also sind in diesem Fall: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $v_1 \in K$ beliebig) und
  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ (\mu - \lambda)w_1 \end{pmatrix}$ (mit $w_1 \in K$ beliebig) die Lösungen.
  Beachte hier $(v, w) \in Gl(2,K) \Leftrightarrow \lambda \neq \mu$ und $v_1 \neq 0, w_1 \neq 0$.
  (denn $det(v, w) = v_1 w_1 det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (\mu - \lambda) \end{pmatrix} = v_1 w_1 (\mu - \lambda)$ )

- Ist $v_2 \neq 0$ und $w_2 = 0$ erhalten wir analog zu oben:
  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ (\mu - \lambda)v_1 \end{pmatrix}$ (mit $v_1 \in K$ beliebig) und
  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $w_1 \in K$ beliebig)
  Wieder: $(v, w) \in Gl(2,K) \Leftrightarrow \lambda \neq \mu$ und $v_1 \neq 0, w_1 \neq 0$.

- Ist $v_2 \neq 0$ und $w_2 \neq 0$, so ist $\mu = a = b$ und
  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ (\mu - \lambda)v_1 \end{pmatrix}$ (mit $v_1 \in K$ beliebig) und
  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ (\mu - \lambda)w_1 \end{pmatrix}$ (mit $w_1 \in K$ beliebig).

Also in diesem Fall ist $(v, w) \notin GL(2, K)$.

Also gibt es eine Lösung $(v, w) \in GL(2, K) \Leftrightarrow \lambda \neq \mu$ $\square$

**Aufgabe 4**

Beh : Jede Permutation in $S_n, n \geq 2$ läßt sich als Verknüpfung von Transpositionen schreiben.
Beweis : Induktion nach n
$n = 2$: $S_2 = \{id, (12)\}$ ,da $id = (12)(12)$ ist der Fall klar.
$n \mapsto n + 1$: Sei $\sigma \in S_n$.
Gilt $\sigma(n + 1) = n + 1$, so ist die Einschränkung $\sigma|_{\{1,\ldots,n\}} \in S_n$ ,also nach Induktionsvoraussetzung ist dieser Fall schon bewiesen.
Sonst gibt es $l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma(n + 1) = l$
Für die Abbildung $\tau = (l, n + 1) \circ \sigma$ gilt dann
$\tau(n + 1) = [(l, n + 1) \circ \sigma](n + 1) = [(l, n + 1)](l) = n + 1$, also gibt es Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_r$ mit $\tau = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$.
Damit ist aber $\sigma = (l, n + 1) \circ \tau$ Produkt von Transpositionen. $\square$