Aufgabe 1

Sei $U \subseteq S_{n+m}$ folgendermaßen definiert:

$$U := \{\sigma \in S_{n+m} : \sigma(i) \leq n \;\forall\; i \leq n\}$$

U ist also gerade die Menge derjenigen Perumtationen, welche die ersten n Elemente auf die ersten n Elemente verteilen. Wegen der Bijektivität einer Permutation folgt für beliebiges $\sigma \in U$ auch sofort: $\sigma(j) > n$ für alle $j > n$. Zu $\sigma \in U$ bezeichne die Einschränkung auf die ersten n Elemente mit $\breve{\sigma} \in S_n$ und die Einschränkung auf die letzten m Elemente mit $\hat{\sigma} \in S_m$. Nach der Formel zur Berechnung des Signums gilt dann natürlich auch: $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\breve{\sigma}) \cdot \operatorname{sgn}(\hat{\sigma})$.
Seien nun folgende Matrizen gegeben:
$A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, R)$
$B = (b_{ij})_{i,j} \in M(n \times m, R)$
$C = (c_{ij})_{i,j} \in M(m \times m, R)$
$D = (d_{ij})_{i,j} \in M(n + m, n + m, R)$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i, j \leq n \\ b_{i,j-n} & \text{falls } i \leq n, j > n \\ 0 & \text{falls } i > n, j \leq n \\ c_{i-n,j-n} & \text{falls } i, j > n \end{cases}$$

Für $\sigma \in S_{n+m} \backslash U$ gilt: es gibt ein $i > n$ mit $\sigma(i) \leq n$. Für dieses σ folgt:

$$\prod_{i=1}^{n+m} d_{i,\sigma(i)} = 0$$

Also gilt für die Determinante:

$$\det D = \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+m} d_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in U} \operatorname{sgn}(\breve{\sigma}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\breve{\sigma}(i)} \cdot \operatorname{sgn}(\hat{\sigma}) \prod_{j=1}^{m} c_{j,\hat{\sigma}(j)} = \det A \cdot \det C$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Aufgabe 2

Zunächst mit der Leibniz-Formel:

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (-1)^{i+\sigma(i)} a_{i,\sigma(i)} = (-1)^{2\sum_{i=1}^{n} i} \det A = \det A$$

Dies gilt, da für jedes $\sigma \in S_n$ folgt:

$$\prod_{i=1}^{n} (-1)^{i+\sigma(i)} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n} i+\sigma(i)} = (-1)^{2\sum_{i=1}^{n} i} = 1$$

Nun mit Hilfe des Determinanten-Produkt-Satzes.
Sei $S = (s_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, R)$ definiert durch:

$$s_{ij} = \begin{cases} (-1)^i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Damit ist S eine Diagonalmatrix und es gilt: $S^2 = I_n$. Definiere nun $C = (c_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, R)$ durch $C = SAS$. Behauptung: $C = B$. Denn es gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} s_{ik} a_{kl} s_{lj} = \sum_{l=1}^{n} s_{ii} a_{il} s_{lj} = s_{ii} a_{ij} s_{jj} = (-1)^i (-1)^j a_{ij} = b_{ij}$$

Der Determinanten-Produkt-Satz liefert nun:

$$\det B = \det(SAS) = \det(S^2) \cdot \det A = \det A$$

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Aufgabe 3

Zu $n \in \mathbb{N}$ seien $a_1, \ldots, a_n \in R$ gegeben und eine Matrix $B = (b_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, R)$ definiert durch $b_{ij} = a_i^{j-1}$. Zeige per Induktion über n:

$$\det B = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Für $n = 1$ ist $\det B = \det[1] = 1$ und das ist auch der Wert des leeren Produktes.
Sei also $n > 1$ und die Behauptung für $k < n$ bereits gezeigt.
Bilde nun die Matrix $B' = (b'_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, R)$ durch Spaltenumformungen aus B wie folgt: durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren $Q_{ij}(\mu)$ von links ziehe das a_n-fache der vorletzten Spalte von der letzten Spalte ab. Danach ziehe das a_n-fache der vorvorletzten Zeile von der vorletzten ab und so weiter bis schliesslich das a_n-fache der ersten Spalte von der zweiten abgezogen wird. Dann gilt:

$$b'_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_n \cdot b_{i,j-1} & \text{falls } j > 1 \\ 1 & \text{falls } j = 1 \end{cases}$$

Für $1 \leq i \leq n$ und $1 < j \leq n$ gilt dann:

$$b'_{ij} = b_{ij} - a_n \cdot b_{i,j-1} = a_i^{j-1} - a_n \cdot a_i^{j-2} = (a_i - a_n) \cdot a_i^{j-2} = (a_i - a_n) \cdot b_{i,j-1}$$

Insbesondere ist für $j > 1$ auch $b'_{nj} = 0$. Da elementare Spaltenumformungen obigen Typs die Determinante nicht ändern, gilt: $\det B = \det B'$. Entwickle nun die Determinante von B' nach der letzten Zeile:

$$\det B' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} b'_{nj} \det B'_{nj} = (-1)^{n+1} \cdot \det B'_{n1}$$

Nun ist einerseits $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ und ausserdem gilt nach obigen Überlegungen:

$$\det B' = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \det \tilde{B} = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \det \tilde{B}$$

Hierbei gilt: $\tilde{B} = (\tilde{b_{ij}})_{i,j} \in M((n-1) \times (n-1), R)$ mit $\tilde{b_{ij}} = a_i^{j-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\det \tilde{B} = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$$

Zusammen ergibt sich:

$$\det B = \det B' = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$$

Und das war zu beweisen. $\square$

Aufgabe 4

"$(i) \Rightarrow (ii)$"
Gegeben sind invertierbare Matrizen $L = (l_{ij})_{i,j}, R = (r_{ij})_{i,j} \in M(n \times n, K)$ mit $A = LR$, wobei L eine untere und R eine obere Dreiecksmatrix ist. Zu zeigen ist nun: für jedes $t \in \{1, \ldots, n\}$ gilt A_t ist invertierbar.
Zunächst gilt: $0 \neq \det L = \prod_{i=1}^n l_{ii}$ und ebenso $0 \neq \det R = \prod_{i=1}^n r_{ii}$.
Daraus folgt sofort: $\det L_t \neq 0$ und $\det R_t \neq 0$, das heisst L_t und R_t sind für jedes $1 \leq t \leq n$ wieder invertierbar, da die Einträge in einem Körper liegen.
Weiter gilt für $i, j \in \{1, \ldots, t\}$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} r_{kj} = \sum_{k=1}^{t} l_{ik} r_{kj} + \underbrace{\sum_{k=t+1}^{n} l_{ik} r_{kj}}_{=0}$$

Die letzte Summe ist gleich 0, da L eine untere Dreiecksmatrix ist und für $k > t \geq i$ folgt: $l_{ik} = 0$.
Damit gilt aber $A_t = L_t \cdot R_t$ und folglich ist A_t als Produkt invertierbarer Matrizen selbst invertierbar.

"$(ii) \Rightarrow (i)$"
Behauptung: A lässt sich durch Multiplikation von links mit Matrizen der Form $Q_{ij}(\mu)$ mit $i > j$ auf die Gestalt einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix bringen. Beweis durch Induktion über n:
Der Fall $n = 1$ ist klar, denn jede (1×1)-Matrix ist in oberer Dreiecksform.
Sei also $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine $(n-1)\times(n-1)$-Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j}$ mit $Q \cdot A_{n-1} = S = (s_{ij})_{i,j}$ und S ist eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, d.h. für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt: $s_{ii} \neq 0$. Das Q ist dabei Produkt von Matrizen $Q_{ij}(\mu)$ mit $i > j$.
Definiere nun $\overline{Q} = (\overline{q_{ij}})_{i,j} \in M(n \times n, K)$ durch:

$$\overline{q_{ij}} = \begin{cases} q_{ij} & \text{falls } i, j \leq n-1 \\ \delta_{ij} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\overline{Q}$ ist natürlich ebenfalls Produkt von Matrizen der geforderten Form (und damit insbesondere eine invertierbare untere Dreiecksmatrix). Es gilt:

$$\overline{Q} \cdot A = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,n-1} & * \\ 0 & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & s_{n-1,n-1} & * \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Für $i \in \{1, \dots n-1\}$ multipliziere nun $\overline{Q}A$ von links mit $Q_{ni}(-\frac{a_{ni}}{s_{ii}})$. Das Produkt dieser Matrizen mit $\overline{Q}$ sei mit Q' bezeichnet - das ist wieder eine invertierbare untere Dreiecksmatrix und es gilt $Q'A = R$, wobei R eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.
Damit ist die Behauptung per Induktion gezeigt. Daraus folgt nun leicht Aussage (i):
Setze $L := Q'^{-1}$, dann ist $A = LR$. $\square$