1.Aufgabe

Satz 1. *Seien* $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ *und* $b, k \in \mathbb{N}$*, so dass:*

$$\forall i = 1, \dots, n : k | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b^{n-j}.$$

Dann teilt k *auch* $\det(A)$.

Beweis. Sei $A^\sharp = (a^\sharp_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ die komlementäre Matrix zu A und sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b^{n-1} \\ \vdots \\ b^0 \end{pmatrix}.$$

Dann teilt nach Voraussetzung k alle v_i. Linksmultipliation mit $A^\sharp$ ergibt:

$$A^\sharp A \begin{pmatrix} b^{n-1} \\ \vdots \\ b^0 \end{pmatrix} = A^\sharp v.$$

In der letzten Zeile steht dann:

$$\det(A) b^0 = \sum_{i=1}^{n} a^\sharp_{ni} v_i.$$

Da k jeden Summanden der rechten Seite dividiert, teilt k auch die linke Seite, die gleich $\det(A)$ ist. $\square$

In dem Beispiel auf dem Aufgabenzettel ist $k = 17$ und $b = 10$.

2.Aufgabe

Sei R ein kommutativer Ring. Ist $A \in M(m \times n, R)$, so sei ${}^tA = (a'_{ij})_{ij} \in M(n \times m, R)$ die Matrix mit $a'_{ij} = a_{ji}$ für $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Seien $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in M(m \times n, R), C = (c_{ij})_{ij} \in M(n \times r, r)$. Sei $D = (d_{ij})_{ij} = A + B$ und $E = (e_{ij})_{ij} = AC$. Dann gilt:

(a)
$$d'_{ij} = d_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a'_{ij} + b'_{ij}$$

Also folgt:

$${}^t(A + B) =^t A +^t B.$$

(b) Nach Teil (a) gilt:

$$^tA +^t (-A) =^t (A + (-A)) =^t 0 = 0$$

Da das Inverse zu ^tA eindeutig bestimmt ist, folgt:

$$^t(-A) = -^tA.$$

(c)

$$e'_{ij} = e_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}c_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj}c'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} c'_{ik}a'_{kj}$$

Also ist:

$$^t(AC) =^t C^tA.$$

(d) Sei A invertierbar. Dann gilt nach Teil (c):

$$^tA^t(A^{-1}) =^t (A^{-1}A) =^t I = I$$

Also ist auch ^tA invertierbar mit inverser Matrix $^t(A^{-1})$.

3.Aufgabe

Sei R ein kommutativer Ring. Seien $A, B \in M(n \times n, R)$. Dann ist das Lie-Produkt definiert als: $[A, B] = AB - BA$.
Seien $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C \in M(n \times n, R)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Dann gilt:

1.
$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$$

2.
$$[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B] = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B - B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$$
$$= \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B - B\lambda_1 A_1 + B\lambda_2 A_2 = \lambda_1(A_1 B - BA_1) + \lambda_2(A_2 B - BA_2)$$
$$= \lambda_1[A, B_1] + \lambda_2[A_2, B]$$

Wegen 1 gilt:
$$[A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2] = -[\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2, A]$$
$$= -\lambda_1[B_1, A] - \lambda_2[B_2, A] = \lambda_1[A, B_1] + \lambda_2[A, B_2]$$

3.
$$[A, A] = AA - AA = 0$$

4.
$$
\begin{aligned}
&[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]\\
&=[A,BC-CB]+[B,CA-AC]+[C,[A,B]]\\
&=A(BC-CB)-(BC-CB)A+B(CA-AC)-(CA-AC)B+[C,[A,B]]\\
&=ABC-ACB-BCA+CBA+BCA-BAC-CAB+ACB+[C,[A,B]]\\
&=ABC+CBA-BAC-CAB+[C,[A,B]]\\
&=(AB-BA)C-C(AB-BA)+[C,[A,B]]=[AB-BA,C]+[C,[A,B]]\\
&=[[A,B],C]+[C,[A,B]]=0
\end{aligned}
$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen 1.

4.Aufgabe

(a) Sei K ein Körper. Zu zeigen ist, dass eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ und es kein $\lambda \in K$ mit $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ gibt.
Angenommen die Matrix ist invertierbar, dann ist $ad-bc \neq 0$. Also muss entweder $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ gelten. Sei nun angenommen, dass es ein $\lambda \in K$ mit $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ gibt. Dann ist $ad-bc = a\lambda b - b\lambda a = 0$. Was ein Widerspruch zur Invertierbarkeit ist. Also muss auch die zweite Bedingung erfüllt sein.
Nun ist noch die Umkehrung zu zeigen. Seien also die beiden Bedingungen aus dem Satz erfüllt. Angenommen $ad-bc=0$. Falls $a \neq 0$ gilt, ist $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ mit $\lambda = \frac{c}{a}$ erfüllt, weil $\frac{bc}{a} = d$ ist. Falls umgekehrt $b \neq 0$ gilt, ist $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ mit $\lambda = \frac{d}{b}$ erfüllt. Beides ist ein Widerspruch, sodass $ad-bc \neq 0$ sein muss. Damit ist die Matrix invertierbar.

(b) Sei K ein Körper mit q Elementen. Gesucht ist die Anzahl der inverteirbaren (2×2)-Matrizen. Um die erste Bedingung aus Teil (a) zu erfüllen, hat man q^2-1 Möglichkeiten a und b zu wählen, da genau ein Paar von Elementen aus K ausgeschlossen ist. Um die zweite Bedingung zu erfüllen hat man q^2-q Möglichkeiten, da Vielfache von $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ für die Wahl von c und d ausgeschlossen sind. Dies sind genau q Möglichkeiten, da $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Insgesamt hat man also $(q^2-1)(q^2-q)$ Möglichkeiten.
Es gilt also: $|\operatorname{Gl}_2(K)| = q^4-q^3-q^2+q$.