Aufgabe 1

a) Seien $a = 97059503$ und $b = 96049601$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a &= 1 \cdot b + r_0 && \text{mit } r_0 = 1009902 \\ b &= 95 \cdot r_0 + r_1 && \text{mit } r_1 = 108911 \\ r_0 &= 9 \cdot r_1 + r_2 && \text{mit } r_2 = 29703 \\ r_1 &= 3 \cdot r_2 + r_3 && \text{mit } r_3 = 19802 \\ r_2 &= 1 \cdot r_3 + r_4 && \text{mit } r_4 = 9901 \\ r_3 &= 2 \cdot r_4 + 0 \end{aligned}$$

Es folgt: $ggT(a, b) = 9901$. Außerdem gilt: $9901 = 3519 \cdot a - 3556 \cdot b$.

b) Sei nun $a = T^5 + 2T^4 + T^3 + T^2 + 2T + 1$ und $b = T^5 + T^3 + T^2 + 1$.

$$\begin{aligned} a &= 1 \cdot b + r_0 && \text{mit } r_0 = 2T^4 + 2T \\ b &= \frac{1}{2}T \cdot r_0 + r_1 && \text{mit } r_1 = T^3 + 1 \\ r_0 &= 2T \cdot r_1 + 0 \end{aligned}$$

Also gilt: $ggT(a, b) = T^3 + 1$ und $T^3 + 1 = -\frac{1}{2}T \cdot a + (1 + \frac{1}{2}T) \cdot b$.

Aufgabe 2

Zunächst folgt mit Induktion (vgl. auch Aufgabe 2 von Zettel 2), dass $J(0, n)^n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ebenfalls induktiv zeigt man: $J(0, n)^{n-1} = E_{1,n} \neq 0$. Sei nun $\lambda \in K$ beliebig. Da $J(\lambda, n) - \lambda \cdot E_n = J(0, n)$ ist, folgt sofort, dass $J(\lambda, n)$ eine Nullstelle des Polynoms $\mu = (T - \lambda)^n$ ist. Aus der Vorbemerkung folgt ebenfalls sofort, dass jeder echte Teiler von μ die Matrix $J(\lambda, n)$ nicht als Nullstelle haben kann, womit μ das gesuchte Minimalpolynom ist. □

Aufgabe 3

Zunächst betrachte $B := \prod_{i=1}^{m}(A - d_i E_n)$. Da alle Faktoren Diagonalmatrizen sind, die miteinander kommutieren, ist diese Schreibweise sinnvoll. $B = (b_{ij})_{i,j}$ ist ebenfalls eine Diagonalmatrix. Für $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$b_{jj} = \prod_{i=1}^{m}(a_{jj} - d_i)$$

Da $a_{jj} \in \{d_1, \ldots, d_m\}$ gilt für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$: $a_{jj} = d_i$ bzw. $a_{jj} - d_i = 0$ und damit ist $b_{jj} = 0$. Da j beliebig war, folgt $B = 0$, also hat das gegebene Polynom die Matrix A als Nullstelle. Wir wollen nun zeigen, dass es das normierte Polynom vom kleinsten Grad mit dieser Eigenschaft ist.

Angenommen das gegebene Polynom ist nicht das Minimalpolynom von A. Aus der Vorlesung ist dann bekannt, dass das Minimalpolynom ein echter Teiler des vorgegebenen Polynoms sein muss. Wenn es uns also gelingt zu zeigen, dass jeder echte Teiler des vorgegebenen Polynoms die Matrix A nicht als Nullstelle hat, so folgt das Gewünschte.

Betrachte o.B.d.A. das Polynom $\prod_{i=1}^{m-1}(T - d_i)$ und sei $C := \prod_{i=1}^{m-1}(A - d_i E_n)$.

Wie oben ist C eine Diagonalmatrix. Da $d_m \in \{a_{11}, \dots a_{nn}\}$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $d_m = a_{jj}$. Es folgt:

$$c_{jj} = \prod_{i=1}^{m-1} (a_{jj} - d_i) = \prod_{i=1}^{m-1} (d_m - d_i) \neq 0$$

Das liegt daran, dass die Elemente $d_1, \dots d_m$ paarweise verschieden sind und jeder Körper nullteilerfrei ist. Damit ist aber $C \neq 0$ und das zeigt die Behauptung. □

Aufgabe 4

Sei $B := T \cdot E_n - A$, also

$$B = \sum_{i=1}^{n} T E_{i,i} - \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i} - \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} E_{i,n}$$

Zu bestimmen ist $\chi_A = \det B$. LaPlace-Entwicklung nach Spalte n liefert:

$$\chi_A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} b_{in} \det B_{in}$$

Die Berechnung wird enorm erleichtert, da es sich bei B_{in} für jedes $1 \leq i \leq n$ um eine Blockmatrix handelt. Zu festem $1 \leq i \leq n$ sei nämlich $C := B_{in}$. Es gilt für $k, j \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$c_{kj} = \begin{cases} b_{kj} & \text{falls } k < i \\ b_{k+1,j} & \text{falls } k \geq i \end{cases}$$

Wie man sich schnell klarmacht, hat diese Matrix Blockgestalt:
Die $(i-1) \times (i-1)$ Untermatrix oben links ist eine untere Dreiecksmatrix mit dem Eintrag T auf der Diagonalen, die $(n-i) \times (n-i)$ Untermatrix unten rechts ist eine obere Dreiecksmatrix mit dem Eintrag (-1) auf der Diagonalen und die restlichen Blöcke haben nur 0-Einträge. Es folgt:

$$\det B_{in} = (-1)^{n-i} \cdot T^{i-1}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\chi_A = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{2n+i-i} b_{in} T^{i-1} + T^{n-1} \cdot (T - a_{n-1}) = T^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$$

Und das löst die Aufgabe. □