Matrikelnr: **Name:**

Tutor: **Vorname:**

Studiengang:

Wiederholungs-Klausur 19.03.05

Jede der folgenden Aufgaben sollte in höchstens 4 Minuten zu bearbeiten sein. Im ersten Durchgang sollte man nach jeweils 4 Minuten zur nächsten Aufgabe übergehen!

Bei den Aufgaben mit dem Zusatz **ohne Beweis** soll **nur die Antwort** notiert werden (ohne Beweis, ohne Angabe des Rechenverfahrens); Nebenrechnungen bitte auf den zusätzlich verteilten leeren Seiten.

Teil I

1. (Ohne Beweis.) Betrachte die $(n \times n)$-Matrix $A = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$. Man gebe die Inverse dieser Matrix an (ebenfalls als Linearkombination der Basis-Matrizen E_{ij}.)

$A^{-1} =$

2. (Ohne Beweis.) Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man gebe $\det A$ und $\det B$ an:

$\det A =$ $\det B =$

Für Nebenrechnungen

3. Die folgenden beiden Matrixen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ seien ähnlich:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 4 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 1 & b_5 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & 2 & b_8 & b_9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Was weiß man über b_0 ? (mit Begründung).

4. Sei $n \geq 3$. Sei U die Menge der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(2) \in \{2,3\}$ und $\sigma(3) \in \{2,3\}$. Man beweise, dass U eine Untergruppe der S_n ist.

Für Nebenrechnungen

5. Sei G eine Gruppe mit Einselement e. Sei $g \in G$ mit $g^3 = g^5 = g^8$. Man beweise, daß $g = e$ gilt.

Teil II

6. (Ohne Beweis). Sei $a = 209$ und $b = 323$. Man schreibe $c = \mathrm{ggT}(a, b)$ als ganzzahlige Linearkombination von a and b.

$c =$

7. (Ohne Beweis.) Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit $A^3 = A^2$. Welche Möglichkeiten gibt es für das Minimalpolynom μ_A ?

Für Nebenrechnungen

8. (Ohne weitere Begründung). a) Man schreibe den Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

b) Man zeige, dass die folgenden vier Vektoren in $\mathbb{Q}^5$ linear abhängig sind.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum, seien U_1, U_2 Unterräume von V mit $U_1 \not\subseteq U_2$ und $U_2 \not\subseteq U_1$. Man zeige, dass $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum von V ist.

Für Nebenrechnungen

Im Folgenden sei K jeweils ein Körper.

10. Sei V ein K-Vektorraum, seinen U_1, U_2, U_3 Unterräume von V mit $U_1 \subseteq U_3$. Man beweise:

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

Teil III.

11. Sei K ein Körper. Seien V, W K-Vektorräume, sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Man beweise: Genau dann ist f injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = 0$ gilt.

Für Nebenrechnungen

12. (Ohne Beweis.) Man bestimme eine Basis des Kerns $\mathrm{Kern}(f_A)$ der linearen Abbildung $f_A\colon K^7 \to K^3$, wobei A die folgende Matrix ist:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. (Ohne Beweis.) Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis b_1, b_2. Sei $f\colon V \to V$ linear mit $f(b_1) = 0$, und $f(b_2) = b_1 + b_2$. Man gebe eine Basis von V an, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Für Nebenrechnungen

14. Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis b_1, b_2. Sei $f\colon V \to V$ linear mit $f(b_1) = b_2$, und $f(b_2) = b_1 + b_2$. Man gebe alle Eigenvektoren von f an (mit Begründung).

15. Sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $v_1 \in V$ ein Eigenvektor für f mit Eigenwert λ_1, sei $v_2 \in V$ ein Eigenvektor für f mit Eigenwert λ_2. Man beweise: Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist $v_1 + v_2$ kein Eigenvektor für f.

Für Nebenrechnungen