

Wiederholungs-Klausur 04.06.05

Jede der folgenden Aufgaben sollte in höchstens 4 Minuten zu bearbeiten sein. Im ersten Durchgang sollte man nach jeweils 4 Minuten zur nächsten Aufgabe übergehen! Bei den Aufgaben mit dem Zusatz **ohne Beweis** soll **nur die Antwort** notiert werden (ohne Beweis, ohne Angabe des Rechenverfahrens).

Mit K wird jeweils ein Körper bezeichnet.

Teil I

1. (Ohne Beweis.) Bestimme $\det A$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (Ohne Beweis.) Bestimme A^{-1} für die folgende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sei R ein Ring. Zeige: Die Menge der (3×3) -Matrizen $A = (a_{ij})_{ij}$ mit

$$a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = 0$$

ist ein Unterring von $M(3 \times 3, R)$.

4. Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ ähnliche Matrizen. Zeige: Ist $A^2 = I_n$, so ist auch $B^2 = I_n$.

5. Zeige: Die Zuordnung $t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ liefert einen Gruppen-Homomorphismus

$$(K, +) \rightarrow \mathrm{GL}(2, K).$$

Teil II

6. Betrachte die folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^5$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kann man (v_1, v_2, v_3) zu einer Basis von $\mathbb{Q}^5$ vervollständigen?

7. (Ohne Beweis.) Gesucht sind zwei (4×4) -Matrizen A, B mit Koeffizienten in K , die beide Rang 2 haben, sodass die Matrix AB Rang 1 hat.

8. Sei V ein K -Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ linear. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige, dass gilt:

$$f^{-1}f(U) = U + \text{Kern}(f).$$

9. Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume des K -Vektorraums V . Zeige:

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) \subseteq (U_2 \cap (U_1 + U_3)) + (U_3 \cap (U_1 + U_2))$$

9. Gesucht ein Beweis oder ein Gegenbeispiel zu folgender Behauptung: Sind U_1, U_2, U_3 Unterräume des K -Vektorraums V , so gilt

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) \subseteq (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$$

10. Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

	Körper K	JA	NEIN
$T^4 + 1$	$K = \mathbb{R}$	☐	☐
$T - 2$	$K = \mathbb{C}$	☐	☐
$T^2 + 1$	$K = \mathbb{C}$	☐	☐
$T^3 - 2$	$K = \mathbb{Q}$	☐	☐
$T^2 - 1$	$K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	☐	☐
$T^5 + T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	☐	☐

Teil III

11. (Ohne Beweis.) Gesucht ist eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, sodass die lineare Abbildung $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ genau vier f_A -invariante Unterräume besitzt.

12. Sind U_1, U_2, U_3 Unterräume des K -Vektorraums V . Zeige

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) \subseteq (U_2 \cap (U_1 + U_3)) + (U_3 \cap (U_1 + U_2)).$$

13. (Ohne Beweis.) Man gebe eine (2×2) -Matrix C mit Koeffizienten in K an, so dass gilt:

der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor mit Eigenwert 5,

der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor mit Eigenwert -2.

14. Sei V ein K -Vektorraum, sei $f: V \rightarrow V$ linear. Sei $v \in V$ Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ . Zeige: Ist $0 \neq \gamma \in K$, so ist auch γv Eigenvektor zu f mit Eigenwert λ .

15. Sei A eine reelle (3×3) -Matrix mit charakteristischem Polynom $T^3 - T$. Zeige, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Zusatzfrage: Warum wurde hier vorausgesetzt, dass der Grundkörper $\mathbb{R}$ ist?

Bewertung: Für jede richtig gelöste Aufgabe gab es 2 Punkte, für die Lösung der Zusatzfrage in Aufgabe 15 hätte es einen Zusatzpunkt gegeben. Bei Aufgabe 7 gab es für n richtige Zeilen $\max(0, \frac{n}{2} - 1)$ Punkte.