

Matrikelnr.:**Name:****Tutor:****Vorname:****Probeklausur 1 (leicht modifiziert)**

Jede der folgenden Aufgaben sollte in höchstens 4 Minuten zu bearbeiten sein. Im ersten Durchgang sollte man nach jeweils 4 Minuten zur nächsten Aufgabe übergehen!

Bei den Aufgaben 1–9 soll nur die Antwort notiert werden (ohne Angabe des Rechenverfahrens)

- 1) Berechne A^{99} für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A^{99} =$$

- 2) Man gebe (2×2) -Matrizen A, B an mit $AB \neq BA$.

$$A =$$

$$B =$$

- 3) Man gebe (2×2) -Matrizen A, B an mit $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

$$A =$$

$$B =$$

4) Die Determinante $\det A$ der Matrix $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist 1. Gesucht sind zwei weitere Matrizen A_2, A_3 mit erster Zeile $[1 \ 2]$, für die ebenfalls $\det A_2 = \det A_3 = 1$ gilt.

$A_2 =$

$A_3 =$

5) Berechne die folgende Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A =$

6) Bestimme die Menge $\mathcal{F}(\sigma)$ der Fehlstellungen der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Ist σ eine gerade oder eine ungerade Permutation ?

$\mathcal{F}(\sigma) =$

σ ist

7) Man bringe die folgende Matrix durch Zeilenoperationen in Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & -10 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

8) Man bringe die folgende Matrix durch Zeilenoperationen in Schubert-Normalform:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -10 & 17 \end{bmatrix}$$

9) Man invertiere folgende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} =$

Sei R ein Ring.

10) Seien $A, B \in M(n \times n, R)$ ähnlich. Zeige: Gilt $A^2 = A$, so gilt auch $B^2 = B$.

11) Zeige: Sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ eine (2×2) -Matrix mit Koeffizienten in R . Zeige:
Gilt $AE_{12} = E_{12}A$, so ist $a_{21} = 0$ und $a_{11} = a_{22}$.

12) Zeige: Die Menge der (3×3) -Matrizen der Form $\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ mit $a, b \in R$ ist ein Unterring von $M(3 \times 3, R)$.

Für die letzten drei Aufgaben sei R kommutativer Ring.

13) Beweise: Seien $A, B \in M(n \times n, R)$. Dann gilt: $\text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$.

14) Folgere aus 13): Seien $A, P \in M(n \times n, R)$, und sei P invertierbar. Dann gilt:
 $\text{spur}(P^{-1}AP) = \text{spur}(A)$

15) Sei $n \in \mathbb{N}_1$. Zeige: Die Menge der $(n \times n)$ -Matrizen A mit $\det A \in \{1, -1\}$ ist eine Untergruppe von $\text{GL}(n, R)$. (Der Determinanten-Produkt-Satz darf als bekannt vorausgesetzt werden.)