Matrikelnr: **Name:**

Tutor: **Vorname:**

Probeklausur 2

Bei den Aufgaben 7–15 soll nur die Antwort notiert werden.

1) Sei K ein Körper. Man zeige, dass die folgenden Vektoren in K^5 linear unabhängig sind:

$$[1, 1, -1, 0, 0], \ [1, 0, 1, -1, 0], \ [1, 0, 0, 1, -1]$$

2) Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Gibt es 32 Vektoren $v_1, ..., v_{32}$ im Vektorraum K^5, sodass jedes Tripel dieser Vektoren linear unabhängig ist?

Antwort mit Begründung:

3) Seien A, B zwei (2×2)-Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper.
Behauptung: Hat AB den Rang 1, so hat mindestens eine der beiden Matrizen A, B den Rang 1.

Beweis oder Gegenbeispiel.

4) Seien A, B zwei (2×2)-Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper.
Behauptung: Haben die Matrizen A, B den Rang 1, so hat auch AB den Rang 1.

Beweis oder Gegenbeispiel.

5) Sei R ein Ring, sei $r \in R$. Beweise: Ist $r^t = 0$ für ein $t \geq 1$, so ist $1 + r$ invertierbar.

6) Zeige: Das Polynom $\sum_{i=0}^{17} T^i$ in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[T]$ ist nicht irreduzibel.

Bei den Aufgaben 7–15 soll nur die Antwort notiert werden (ohne Angabe des Rechenverfahrens)

7) a) Sei $a = 15$ und $b = -21$. Man schreibe $c = \mathrm{ggT}(a, b)$ als ganzzahlige Linearkombination von a and b.

b) Man bestimme im Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ das Inverse zur Restklasse $\overline{5}$

$c =$	$(\overline{5})^{-1} =$

8) Man notiere ein irreduzibles Polynom f im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ mit Grad 2 und ein irreduzibles Polynom g im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad 3.

$f =$	$g =$

9) Gegeben sind die Polynome $f = X^3 - 1$ und $g = X^2 - 1$ in $\mathbb{R}[X]$. Gesucht ist $h = \mathrm{ggT}(f, g)$.

$h =$

10) Wie lautet das charakteristische Polynom χ_A der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$\chi_A =$

11) Wie lautet das Minimal-Polynom μ_B der Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mu_B =$

12) Sei K ein Körper. Betrachte folgende Teilmengen U_i von K^5. Frage: Ist U_i ein Untervektorraum?

	immer	nie	hängt von K ab
$U_1 = \{x \in K^5 \mid x_2 = 0 \text{ oder } x_5 = 0\}$	○	○	○
$U_2 = \{x \in K^5 \mid x_2 \neq 0\}$	○	○	○
$U_3 = \{x \in K^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$	○	○	○
$U_4 = \{x \in K^5 \mid x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 + x_5^5 = 0\}$	○	○	○

13) Man ergänze die Vektoren

$$b_1 = [1, 1, -1, 0, 0],\ b_2 = [1, 0, 1, -1, 0],\ b_3 = [1, 0, 0, 1, -1]$$

zu einer Basis $\{b_1, ..., b_5\}$ des $\mathbb{R}^5$.

$b_4 =$

$b_5 =$

14) Betrachte die Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ v_7 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_8 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Anzugeben sind zwei Vektoren b_1, b_2 aus der Menge $\mathcal{M} = \{v_1, ..., v_8\}$, sodass gilt: jedes Element aus $\mathcal{M}$ ist eine **ganzzahlige** Linearkombination $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i b_i$ und dabei sind die beiden Koeffizienten λ_1, λ_2, **entweder beide nicht-negativ oder beide nicht-positiv.**

$b_1 =$
$b_2 =$

15) Man schreibe den Vektor $[-4, 5, -2, 1]$ als Linearkombination der Vektoren

$$[1, -1, 0, 0],\ [0, 1, -1, 0],\ [0, 0, 1, -1]$$

$[-4, 5, -2, 1] =$