1. Seien a, b linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$. Betrachte das Gitter $L = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$. Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$ eine Matrix, deren Spalten zu L gehören, und sei $c = Aa$, $d = Ab$. Zeige: Genau dann gilt $L = \mathbb{Z}c + \mathbb{Z}d$, wenn die Determinante von A gleich ± 1 ist.

2. Sei d_0 die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum der Ursprung und Winkel $\pi/2$, sei d_1 die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum $e_1 = {}^t[1\ 0]$ und Winkel $\pi/2$. Zeige: $d_1 d_0$ ist Drehung mit Zentrum ${}^t[\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}]$ und Winkel π.

3. Sei $f \in \mathcal{B}(2)$ uneigentliche Bewegung mit $f^2 = t_a$ mit $a = {}^t[6\ 6]$. Schreibe f in der Form $f = t_b \circ \phi$ mit $\phi \in \mathcal{O}(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$.

4. Zeige: Jede Permutationsmatrix in $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist orthogonal.

5. Zeige: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ orthogonal und zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in Linearfaktoren, so ist A diagonalisierbar.

6. Die Matrix A erfülle die in Aufgabe 5 formulierten Bedingungen. Zeige: Es gibt A-invariante Unterräume U, V von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ und $f_A(u + v) = u - v$.

7. Sei K ein Körper.
(a) Zeige: Die Menge der symmetrischen Matrizen in $M(n \times n, K)$ bildet einen Unterraum.
(b) Bestimme dessen Dimension.

8. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des euklid'schen Vektrraums V. Sei $f \colon V \to V$ linear. Zeige: f ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle f(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, f(v_j) \rangle$ für alle i, j gilt.

9. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des euklid'schen Vektrraums V. Sei $f \colon V \to V$ linear. Zeige: f ist genau dann orthogonal, wenn $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$ für alle i, j gilt.

10. Die symmetrische Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ habe Signatur $(5, 3, 7)$.
Gibt es einen Unterraum U der Dimension 4, sodass die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf U positiv definit ist?
Gibt es einen Unterraum U der Dimension 4, sodass die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf U positive semi-definit ist?
Gibt einen Unterraum U der Dimension 4, sodass die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf U negativ definit ist?
Gibt es einen Unterraum U der Dimension 4, sodass die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf U negativ semi-definit ist?
Gibt es einen Unterraum U der Dimension 4, sodass U total isotrop ist?

11. Zur Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

bestimme man mit Hilfe des Scherungsalgorithmus eine Matrix S, sodass ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

12. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Man bestimme eine orthogonale Matrix P, sodass $P^{-1}AP$ Diagonalmatrix ist. Vorgegeben wird: Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(T) = T^4 - 12T^3 + 48T^2 - 64T = T(T-4)^3.$$

Sei $\langle -, - \rangle_A$ die symmetrische Bilinearform zur Matrix A. Welche Signatur hat sie?

13. Welche der folgenden reellen Matrizen sind positiv definit, welche negativ definit?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{bmatrix},$$

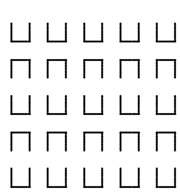
14. Man bestimme die Hauptachsen der Quadrik

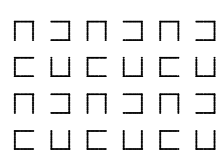
$$2X^2 - 2\sqrt{2}XY + 3Y^2 = 1.$$

15. Wie lautet die erweiterte Koeffizientenmatrix für die quadratische Form

$$X^2 + XY + 2Y^2 - 2X - 2Y + 1$$

16. Geben Sie zu jedem der beiden Tapetenmuster die Punktgruppe $\overline{G}$ an:





Um welche ebene Kristallgruppen handelt es sich?

Hinweis: Bei Aufgaben zur Bestimmung von ebenen Kristallgruppen oder Friesgruppen dürfen (auch in der Klausur) Bestimmungsblätter, wie sie in der Vorlesung verteilt wurden, verwendet werden. Gegebenenfalls wird der Klausur ein entsprechendes Bestimmungsblatt beigefügt.