

Routine-Zettel 2.

1. Routine-Aufgaben zum Lösen von linearen Gleichungssystemen. Die muss sich jeder selbst fabrizieren! (Dabei sollte man an Gleichungssysteme mit etwa 4 Gleichungen und 8 Variablen denken, oder auch an solche mit 8 Gleichungen und 4 Variablen,... - viele der Koeffizienten dürfen durchaus Null sein.)

2. Routine-Aufgaben zum Invertieren von Matrizen. Man invertiere die folgenden Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & -9 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sei R ein Ring, $A \in M(n \times n, R)$. Zeige: Ist $A^t = 0$ für ein $t \geq 1$, so ist $I + A$ invertierbar.

4. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ eine invertierbare Matrix mit Koeffizienten im Körper K .

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $a \neq 0$
- (ii) $A = L \cdot R$, wobei L eine untere Dreiecksmatrix, R eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $a = 0$
- (ii) A lässt sich in der Form $L \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot R$ schreiben, wobei L eine untere Dreiecksmatrix, R eine obere Dreiecksmatrix ist.

5. Ein Rechentrick. Berechne (ohne Mühe!) A^{1000} für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -6 & 10 & 4 \\ 12 & -20 & -8 \end{bmatrix}$$

Verwende dabei, dass $A = BC$ gilt, mit $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ und $C = [-3 \ 5 \ 2]$ (und das Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation).

Berechne entsprechend Potenzen von $A' = BC'$ mit $C' = [-3 \ 5 \ 1]$.

6. Man gebe eine Matrix A an, die durch elementare Zeilenumformungen in zwei verschiedene Zeilenstufenformen überführt werden kann. (Bei einer derartigen Frage sollte man ein Beispiel wählen, das so einfach wie möglich ist!)